最難関問題集４年下第18回・くわしい解説

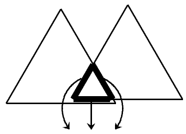
目　次

すぐる学習会
http://www.suguru.jp

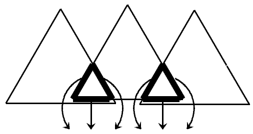
応用問題A $\boxed{1}$

(1)　1まいの場合のまわりの長さは，6×3＝ 18（cm）です。

2まいの場合のまわりの長さは，18×2＝ 36（cm）よりも，2×3＝ 6（cm）短くなって，36－6＝ 30（cm）です。



3まいの場合のまわりの長さは，18×3＝54（cm）よりも，6×2＝12（cm）短くなって，54－12＝42（cm）です。



1まいの場合から，まわりの長さを書いていくと，18，30，42，……のような，等差数列になります。

5まいの場合は，はじめの数＋ふえる数×（Ｎ－１）＝18＋12×（5－1）＝ 66（cm）になります。

(2)　(1)で，この図形のまわりの長さは，18，30，42，……のような，等差数列になることがわかりました。

Ｎまいのときにまわりの長さが186cmになるとすると，18＋12×（Ｎ－１）＝ 186 です。

186－18＝ 168　　168÷12＝ 14　　14＋1＝ 15 ですから，15まい使ったときに，まわりの長さが186cmになります。

応用問題A $\boxed{2}$ (1)

$1=\frac{2}{2}=\frac{3}{3}=\frac{4}{4}=$ …… ですから，ならんでいる分数は次のようにしても同じです。

$\frac{2}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{4}, \frac{3}{4}, \frac{2}{4}, \frac{1}{4}, \frac{5}{5}, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{6}{6}, \frac{5}{6},$ ……

右の図のように，段にして書くと，わかりやすくなります。

$\frac{2}{2}, \frac{1}{2},$
$\frac{3}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3},$
$\frac{4}{4}, \frac{3}{4}, \frac{2}{4}, \frac{1}{4},$
……………………

1段目は2個，2段目は3個，……，8段目は9個なので，1段目から8段目までで，2＋3＋……＋9＝44（個）です。

よって，9段目の 50－44＝6（番目）を求めることになります。

9段目は$\frac{10}{10}$から始まり，$\frac{10}{10}, \frac{9}{10}, \frac{8}{10}, \frac{7}{10}, \frac{6}{10}, \frac{5}{10}$となりますから，6番目は$\frac{5}{10}$です。

この問題では，既約分数（これ以上約分できない分数）に直すことになっているので，答えは $\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$ です。

応用問題A $\boxed{2}$ (2)

$$\frac{2}{2},\ \frac{1}{2},$$
$$\frac{3}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{3},$$
$$\frac{4}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{1}{4},$$
………………………

右の図のように，段にして書きましょう。

$\frac{1}{3}$があらわれる１回目は，$\frac{1}{3}$そのもののときです。

２回目は，$\frac{1\times2}{3\times2}=\frac{2}{6}$のときです。約分したら$\frac{1}{3}$です。

３回目は，$\frac{1\times3}{3\times3}=\frac{3}{9}$のときです。

４回目は，$\frac{1\times4}{3\times4}=\frac{4}{12}$のときです。

よってこの問題は，$\frac{4}{12}$が何番目にあらわれるのかを求める問題になります。

１段目は，分母が２の分数で，２個あります。
２段目は，分母が３の分数で，３個あります。
同じように考えて，11段目は，分母が12の分数で，12個あります。

よって，１段目から11段目までの分数全部の個数は，２＋３＋……＋12＝77（個）です。

11段目の，$\frac{12}{12}$，$\frac{11}{12}$，……，$\frac{4}{12}$，$\frac{3}{12}$，$\frac{2}{12}$，$\frac{1}{12}$まで全部で77個ですが，求めたい個数は$\frac{4}{12}$までですから，$\frac{3}{12}$，$\frac{2}{12}$，$\frac{1}{12}$の３個はいらないです。

よって，77－３＝74（個）となり，４回目の$\frac{1}{3}$は74番目の分数になります。

応用問題A $\boxed{2}$ (3)

$\frac{2}{2}$, $\frac{1}{2}$,
$\frac{3}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$,
$\frac{4}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{1}{4}$,
………………………

右の図のように，段にして書きましょう。

1段目の和は，$\frac{2}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}=1.5$ です。

2段目の和は，$\frac{3}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=\frac{6}{3}=2$ です。

3段目の和は，$\frac{4}{4}+\frac{3}{4}+\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{10}{4}=2.5$ です。

このように，それぞれの段の和は，1.5，2，2.5，…という，等差数列になります。

(2)で求めた分数は11段目にあります。

11段目は，はじめの数＋ふえる数×（N－1）＝1.5＋0.5×(11－1)＝6.5 です。

1段目から11段目までの和は，(はじめ＋おわり)×N÷2＝(1.5＋6.5)×11÷2＝44 になります。

(2)でわかった通り，最後の3個の分数である $\frac{3}{12}$，$\frac{2}{12}$，$\frac{1}{12}$ は，和にふくめません。

$\frac{3}{12}+\frac{2}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{2}$ なので，答えは，$44-\frac{1}{2}=43\frac{1}{2}$ です。

応用問題A $\boxed{3}$ (1)

2，　1，
4，　3，
6，　5，
8，　7，
10，　9，
12，11，
…………

右の図のように，2個ずつの段にして解きましょう。

それぞれの段の左側の数は偶数で，右側の数は奇数になっています。

100は偶数ですから，左側にあらわれます。

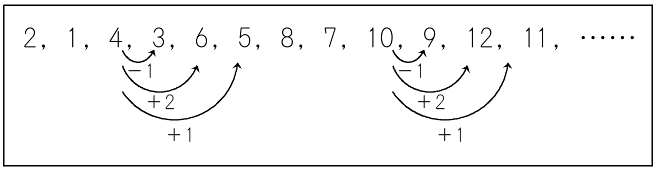
左側には，2，4，6，8，……のように，2の倍数があらわれています。

100÷2＝50 ですから，100は50段目の左側にあらわれることがわかります。

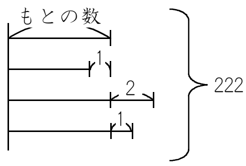
1段に2個ずつあるので，50段目までで，2×50＝100（個）の数があります。

100個目の数は50段目の右側の数なので，50段目の左側の数である100は，100－1＝99（番目）の数です。

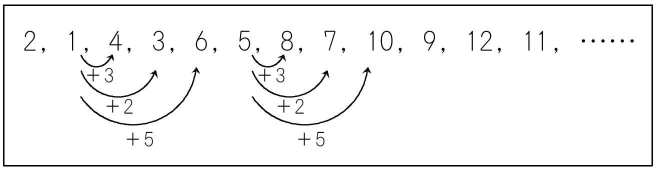
応用問題A $\boxed{3}$ (2)



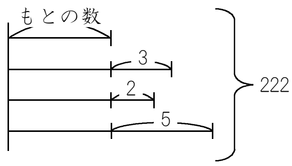
右の図のように数がならんでいます。
偶数の数をもとにすると，
次の数はもとにする数よりも１少なく，
その次の数はもとにする数よりも２大きく，
その次の数はもとにする数よりも１大きくなっています。



線分図にすると右の図のようになり，もとの数は，
（222＋1－2－1）÷4＝ 55 になります。
しかし偶数の数をもとにしているので，奇数である
55 はダメです。



偶数の数をもとにすると，
次の数はもとにする数よりも３大きく，
その次の数はもとにする数よりも２大きく，
その次の数はもとにする数よりも５大きくなっています。



線分図にすると右の図のようになり，もとの数は，
（222－3－2－5）÷4＝ 53 になり，これは奇数なのでＯＫです。

もとの数は53です。
次の数は 53＋3＝56 です。
その次の数は 53＋2＝55 です。
その次の数は 53＋5＝58 です。

４つの数は，53，56，55，58 であることがわかりました。

応用問題A $\boxed{4}$ (1)

たとえば5だんの場合は，白石は（1＋5＋9）個が使われています。

同じように考えると，7だんの場合は，白石は（1＋5＋9＋13）個が使われています。

9だんの場合は，白石は（1＋5＋9＋13＋17）個が使われています。

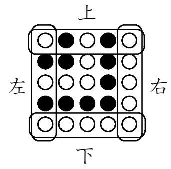
11だんの場合は，白石は（1＋5＋9＋13＋17＋21）個が使われています。

13だんの場合は，白石は（1＋5＋9＋13＋17＋21＋25）個が使われています。

13だんの場合の白石は，(はじめ＋おわり)×個数÷２＝(1＋25)×7÷2＝91（個）が使われています。

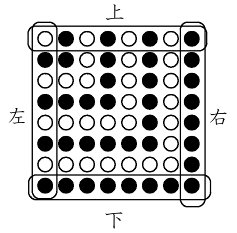
応用問題A $\boxed{4}$ (2)

奇数だんの場合は，外側のひとまわりの黒石が45個になることはありえません。なぜなら，



たとえば右の図のような5だんのような奇数だんの場合は，右と下には黒石は使われていません。

上と左には同じ個数の黒石が使われているので，その合計は偶数個になり，45個のような奇数個にはなりません。



たとえば右の図のような8だんのような偶数だんの場合は，上には白黒合わせて8個ありますが，黒石は半分の4個です。

左も同じように黒石は4個です。

上と左合わせて，4×2＝8（個）になり，8だんというだんの数と同じになります。

右は黒石ばかりなので8個，下も黒石ばかりなので8個，右上，左下，右下のかどにある3個はダブルでかぞえているので，

全体の黒石の数は，$\underbrace{8}_{\text{上左}}+\underbrace{8}_{\text{右}}+\underbrace{8}_{\text{下}}\underbrace{-3}_{\text{ダブリ}}$＝8×3−3＝21（個）になっています。

8だんの場合は，「8×3−3」という式になることがわかりました。

□だんの場合は，「□×3－３」という式になり，その式の結果が45になればよいのですから，　□×3−3＝45　　45＋3＝48　　48÷3＝16 ←偶数なのでＯＫ

よって外側のまわりに黒石が45個あるのは16だんの場合であることがわかりましたから，16だんの場合の黒石全部の個数を求めればよいことになります。

たとえば8だんのときの黒石全部の個数は，(3＋7＋11＋15)個です。

8だんのときは，はじめが3で，4ずつふえる等差数列$\underbrace{\text{4個}}_{\text{8の半分}}$の和になっています。

16だんのときも，はじめが3で，4ずつふえる等差数列$\underbrace{\text{8個}}_{\text{16の半分}}$の和になります。

等差数列の8番目の数は，はじめ＋ふえる数×（Ｎ－１）＝3+4×(8−1)＝31 です。

よって，この等差数列の8番目までの和は，
（はじめ＋おわり）×Ｎ÷2＝（3＋31）× 8÷2＝136（個）になります。

応用問題B $\boxed{1}$ (1)

次のように数がならんでいます。

$$1,\ 2,\ 1,\ 3,\ 1\frac{1}{2},\ 1,\ 4,\ 2,\ 1\frac{1}{3},\ 1,\ 5,\ 2\frac{1}{2},\ 1\frac{2}{3},\ 1\frac{1}{4},\ \cdots\cdots$$

$1=\frac{1}{1}=\frac{2}{2}=\frac{3}{3}=\cdots\cdots$ ですから，ならんでいる分数を次のようにしても同じです。

$$\frac{1}{1},\ 2,\ \frac{2}{2},\ 3,\ 1\frac{1}{2},\ \frac{3}{3},\ 4,\ 2,\ 1\frac{1}{3},\ \frac{4}{4},\ 5,\ 2\frac{1}{2},\ 1\frac{2}{3},\ 1\frac{1}{4},\ \cdots\cdots$$

さらに，2，3，4，……という整数を，分母を1にして分数の形にします。

$$\frac{1}{1},\ \frac{2}{1},\ \frac{2}{2},\ \frac{3}{1},\ 1\frac{1}{2},\ \frac{3}{3},\ \frac{4}{1},\ \frac{2}{1},\ 1\frac{1}{3},\ \frac{4}{4},\ \frac{5}{1},\ 2\frac{1}{2},\ 1\frac{2}{3},\ 1\frac{1}{4},\ \cdots\cdots$$

帯分数を仮分数に直すと，ならんでいる規則が見えてきます。

$$\frac{1}{1},\ \frac{2}{1},\ \frac{2}{2},\ \frac{3}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{3}{3},\ \frac{4}{1},\ \frac{2}{1},\ \frac{4}{3},\ \frac{4}{4},\ \frac{5}{1},\ \frac{5}{2},\ \frac{5}{3},\ \frac{5}{4},\ \cdots\cdots$$

8番目にある $\frac{2}{1}$ という分数を $\frac{4}{2}$ に直すと，規則が完全にわかります。

$$\frac{1}{1},\ \frac{2}{1},\ \frac{2}{2},\ \frac{3}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{3}{3},\ \frac{4}{1},\ \frac{4}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{4}{4},\ \frac{5}{1},\ \frac{5}{2},\ \frac{5}{3},\ \frac{5}{4},\ \cdots\cdots$$

右の表のように，段にすると，考えやすくなります。
1番上の段は1個，2段目は2個，3段は3個，……のようになっています。
つまり，1＋2＋3＋…という，1からはじまる和が，100になればよいわけです。
13までの和は，1＋2＋3＋……＋13＝91になり，100にかなり近くなることを，おぼえておきましょう。
よって100は，14段目の，左から 100－91＝9（番目）の分数です。

$$\begin{array}{llll}\frac{1}{1}, & & & \\ \frac{2}{1}, & \frac{2}{2}, & & \\ \frac{3}{1}, & \frac{3}{2}, & \frac{3}{3}, & \\ \frac{4}{1}, & \frac{4}{2}, & \frac{4}{3}, & \frac{4}{4}, \\ \cdots\cdots & & & \end{array}$$

14段目は，分子が14になっています。
左から9番目の分数は，分母が9です。

よって100番目の分数は，$\frac{14}{9}=1\frac{5}{9}$ になります。

応用問題B $\boxed{1}$ (2)

$\dfrac{1}{1}$,

$\dfrac{2}{1}$, $\dfrac{2}{2}$,

$\dfrac{3}{1}$, $\dfrac{3}{2}$, $\dfrac{3}{3}$,

$\dfrac{4}{1}$, $\dfrac{4}{2}$, $\dfrac{4}{3}$, $\dfrac{4}{4}$,

………………………

右の表のように，段にすると，考えやすくなります。

$2\dfrac{1}{3}=\dfrac{7}{3}$ が1回目にあらわれるのは，分子が7になっているのですから7段目で，分母が3になっているのですから，左から3番目の分数としてあらわれます。

$\dfrac{7}{3}$ が2回目にあらわれるのは，$\dfrac{7\times2}{3\times2}=\dfrac{14}{6}$ があらわれるときなので，14段目の，左から6番目の分数として，あらわれます。

$\dfrac{7}{3}$ が3回目にあらわれるのは，$\dfrac{7\times3}{3\times3}=\dfrac{21}{9}$ があらわれるときなので，21段目の，左から9番目の分数としてあらわれます。

20段目までには，（はじめ＋おわり）×個数÷2＝（1＋20）×20÷2＝210（個）の分数がありますから，21段目の左から9番目までには，210＋9＝219（個）の分数があります。

よって，$2\dfrac{1}{3}$ が3回目にあらわれるのは，219番目であることがわかりました。

応用問題B $\boxed{2}$

(1) 奇数番目と偶数番目に分けて考えます。

6番目というのは偶数番目ですから，2番目，4番目，6番目の白のタイルのならび方を見ていきます。

2番目には，白いタイルは（1＋5）まいならんでいます。

4番目には，白いタイルは（1＋5＋9）まいならんでいます。

6番目には，白いタイルは 1＋5＋9＋13＝28（まい）ならんでいることになります。

(2) 1番目の白と黒の差は，3－1＝2（まい）です。
2番目の白と黒の差は，(1＋5)－3＝3（まい）です。
3番目の白と黒の差は，(3＋7)－(1＋5)＝4（まい）です。
4番目の白と黒の差は，(1＋5＋9)－(3＋7)＝5（まい）です。

この問題では，差が21まいですから，□＋1＝21 となり，□＝21－1＝20 です。

よって，20番目の白と黒の差が21まいであることがわかりました。

この問題は，20番目の一番下のだんにならんでいるタイルが何まいなのかを求める問題です。

1番目の一番下にならんでいるタイルは，3まいです。
2番目 〃 5まいです。
3番目 〃 7まいです。

一番下にならんでいるタイルは，3，5，7，…… のように，3からはじまって，2ずつふえる等差数列です。

20番目は，はじめ＋ふえる数×（N－1）＝3＋2×（20－1）＝41（まい）です。

（次のページへ）

(3)　1番目の白黒合わせたタイルのまい数は，1＋3＝4（まい）です。
　2番目　　　　　　　　〃　　　　　　　　1＋3＋5＝9（まい）です。
　3番目　　　　　　　　〃　　　　　　　　1＋3＋5＋7＝16（まい）です。

4まい，9まい，16まい，……というまい数を見て，「平方数だ！」と気づきましたか？

たとえば1番目なら，2×2＝4（まい）になっています。
2番目なら，3×3＝9（まい）になっています。
3番目なら，4×4＝16（まい）になっています。

よって，□番目なら，(□＋1)×(□＋1)まい，(□＋1)番目なら，(□＋2)×(□＋2)まいになります。

□番目と(□＋1)番目の，となり合った2つの山のまい数の和が2113まいになったとすれば，(□＋1)×(□＋1)と，(□＋2)×(□＋2)の和が，2113になればよいということです。

□を求めるには，適当にあてはめてみる解き方でＯＫです。

□＝30なら，31×31＋32×32＝1985で，小さすぎます。
□＝31なら，32×32＋33×33＝2113で，ＯＫです。

よって，31番目と32番目のとなり合う2つの山のまい数の和が，2113まいになります。

この問題は,30番目と31番目の白いタイルのまい数の和を求める問題になりました。

たとえば1番目と2番目の白いタイルのまい数の和は，1＋3＋5＝9（まい）ですが，このまい数は，2番目の白黒合わせたまい数と同じです。

2番目と3番目の白いタイルのまい数の和は，1＋3＋5＋7＝16（まい）ですが，このまい数は，3番目の白黒合わせたまい数と同じです。

このように考えると，31番目と32番目の白いタイルのまい数の和は，32番目の白黒合わせたまい数と同じになります。

32番目の白黒合わせたまい数は，32×32ではなく，33×33＝1089（まい）になります。