演習問題集5年下第13回・くわしい解説

目　次

すぐる学習会
https://www.suguru.jp

反復問題(基本) $\boxed{1}$ (1)

$\boxed{\text{ワンポイント}}$　1から100までの中の素数25個を，いつでも書けるようにしましょう。

素数とは，1とその数以外には約数を持たないような数です。

20以上30以下では，偶数(2でわり切れる数)は，1とその数以外に2を約数として持つので，素数ではありません。

よって，奇数である21，23，25，27，29が，素数か素数ではないかを調べるだけでＯＫです。

21は1と21以外に3，7を約数として持つので，素数ではありません。
23は1と23以外に約数がないので，素数です。
25は1と25以外に5を約数として持つので，素数ではありません。
27は1と27以外に3，9を約数として持つので，素数ではありません。
29は1と29以外に約数がないので，素数です。

よって，素数なのは23，29です。

反復問題(基本) 1 (2)

ワンポイント　連除法で，最大公約数は左のみ，最小公倍数は左と下のかけ算です。

①　最大公約数は左のみなので，５です。

$$\begin{array}{r|rr} 5 & 15 & 25 \\ \hline & 3 & 5 \end{array}$$

最小公倍数は左と下のかけ算なので，
５×３×５＝ 75 です。

$$\begin{array}{r|rr} 5 & 15 & 25 \\ \hline & 3 & 5 \end{array}$$

最大公約数は 5，最小公倍数は 75 です。

②　最大公約数は左のみなので，４です。

$$\begin{array}{r|rr} 4 & 32 & 60 \\ \hline & 8 & 15 \end{array}$$

最小公倍数は左と下のかけ算なので，
４×８×15＝ 480 です。

$$\begin{array}{r|rr} 4 & 32 & 60 \\ \hline & 8 & 15 \end{array}$$

最大公約数は 4，最小公倍数は 480 です。

③　最大公約数を求めるときは，全部の数で割れないといけません。
右の連除法で，10 と 24 だけならまだ２で割れますが，21 は２で割れないので，２で割ってはいけないわけです。
最大公約数は左のみなので，３です。

$$\begin{array}{r|rrr} 3 & 30 & 63 & 72 \\ \hline & 10 & 21 & 24 \end{array}$$

最小公倍数を求めるときは，２つでも割れたら割らないといけません。
右の連除法で，10 と 24 だけならまだ２で割れますから２で割って５と 12 にします。２で割れない 21 はそのまま下におろします。
さらに 21 と 12 だけならまだ３で割れますから３で割って７と４にします。
最小公倍数は左と下のかけ算なので，３×２×３×５×７×４＝ 2520 です。

$$\begin{array}{r|rrr} 3 & 30 & 63 & 72 \\ \hline 2 & 10 & 21 & 24 \\ \hline 3 & 5 & 21 & 12 \\ \hline & 5 & 7 & 4 \end{array}$$

最大公約数は 3，最小公倍数は 2520 です。

反復問題(基本) 1 (3)

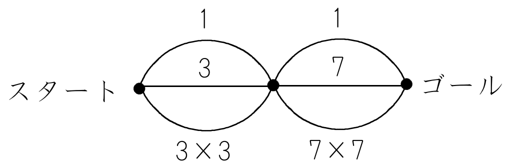
ワンポイント　「道順の問題」と同じ考え方です。

「3×3×7×7」の中には，３が２個あります。
３が２個あるとき，「３の道」は，（２個に１個プラスして）３本あるとします。
その３本とは，「１の道」，「３の道」，「3×3の道」の３本のことです。

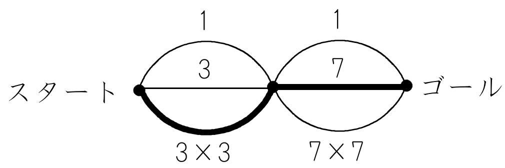
「3×3×7×7」の中には，７が２個あります。
７が２個あるとき，「７の道」は，（２個に１個プラスして）３本あるとします。
その３本とは，「１の道」，「７の道」，「7×7の道」の３本のことです。

このように，素因数分解の中にある素数がＮ個あったら，「１の道」の１本をプラスして，道は（Ｎ＋１）本あることにするのです。

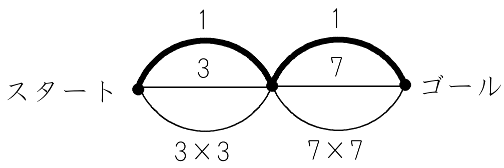
「3×3×7×7」の場合は，右の図のようになります。



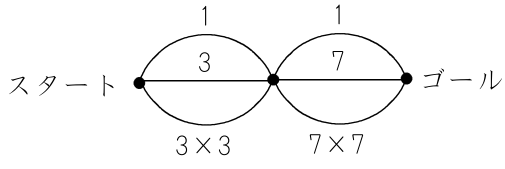
もし，右の図の太線のように通ったとしたら，3×3×7＝63 という約数をゲットした，ということになります。



もし，右の図の太線のように通ったとしたら，1×1×1＝1 という約数をゲットした，ということになります。



このように考えると，約数が何個あるかというのは，右の図のスタートからゴールまでの道の通り方が，何通りあるかという問題と同じだということがわかりました。

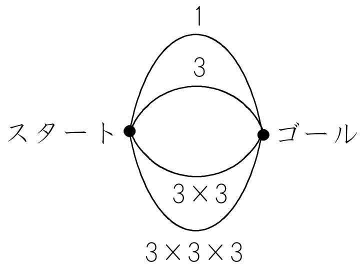


スタートから，３本，３本の道がありますから，約数の個数は，3×3＝9(個)になります。

反復問題(基本) $\boxed{1}$ (4)

$\boxed{\text{ワンポイント}}$　反復問題(基本) $\boxed{1}$ (3)と同じ考え方です。

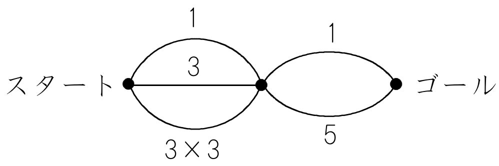
①　27 を素因数分解すると，3×3×3 です。



よって，3に関係するのは「1の道」，「3の道」，「3×3の道」，「3×3×3の道」の4通りの通り方があります。

よって約数の個数も，4個になります。

②　45 を素因数分解すると，3×3×5 です。

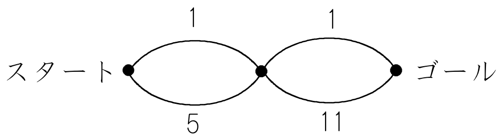


よって，3に関係するのは「1の道」，「3の道」，「3×3の道」の3通りの通り方があり，

5に関係するのは「1の道」，「5の道」の，2通りの通り方があるので，スタートからゴールまでの通り方は，3×2＝6(通り)あります。

よって約数の個数も，6個になります。

③　55 を素因数分解すると，5×11 です。



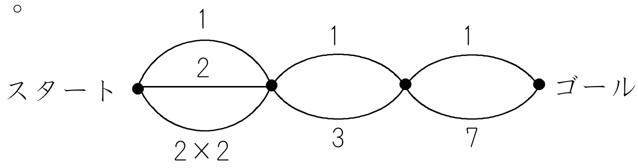
よって，5に関係するのは「1の道」，「5の道」の2通りの通り方があり，

11 に関係するのは「1の道」，「11 の道」の2通りの通り方があるので，スタートからゴールまでの通り方は，2×2＝4(通り)あります。

よって約数の個数も，4個になります。

(次のページへ)

④　84 を素因数分解すると，２×２×３×７です。



２に関係するのは「１の道」，「２の道」，「２×２の道」の３通りの通り方があり，

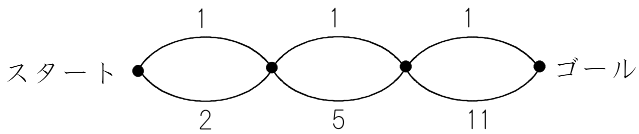
３に関係するのは「１の道」，「３の道」の２通りの通り方があり，

７に関係するのは「１の道」，「７の道」の２通りの通り方があるので，

スタートからゴールまでの通り方は，３×２×２＝ 12(通り)あります。

よって約数の個数も，12 個になります。

⑤　110 を素因数分解すると，２×５×11 です。



２に関係するのは「１の道」，「２の道」の２通りの通り方ががあり，

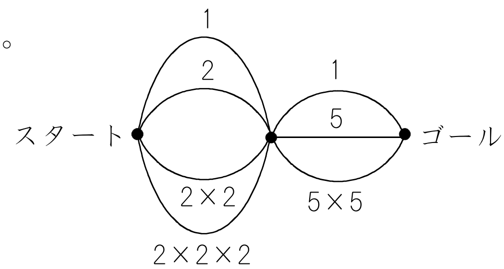
５に関係するのは「１の道」，「５の道」の２通りの通り方があり，

11 に関係するのは「１の道」，「11 の道」の２通りの通り方があるので，

スタートからゴールまでの通り方は，２×２×２＝ 8(通り)あります。

よって約数の個数も，8 個になります。

⑥　200 を素因数分解すると，２×２×２×５×５です。



２に関係するのは「１の道」，「２の道」，「２×２の道」，「２×２×２の道」の４通りの通り方があり，

５に関係するのは「１の道」，「５の道」，「５×５の道」の３通りの通り方があるので，

スタートからゴールまでの通り方は，４×３＝ 12(通り)あります。

よって約数の個数も，12 個になります。

反復問題(基本) $\boxed{1}$ (5)

$\boxed{\text{ワンポイント}}$　連除法で，最大公約数は左のみ，最小公倍数は左と下のかけ算です。

Ａと16の最大公約数が４ですから，右の図のようになり，

$$\begin{array}{r|ll} 4 & A & 16 \\ \hline \end{array}$$

Ａと16の最小公倍数が80ですから，右の図のようになります。

$$\begin{array}{r|ll} 4 & A & 16 \\ \hline & ア & イ \end{array} \rightarrow 80$$

イは，16÷4＝４です。

$$\begin{array}{r|ll} 4 & A & 16 \\ \hline & ア & 4 \end{array} \rightarrow 80$$

4×ア×4＝80ですから，ア＝80÷4÷4＝５です。

Ａ÷4＝５ですから，Ａ＝5×4＝20です。

$$\begin{array}{r|ll} 4 & A & 16 \\ \hline & 5 & 4 \end{array} \rightarrow 80$$

反復問題(基本) $\boxed{1}$ (6)

$\boxed{\text{ワンポイント}}$　約数が３個であるのはどんな数なのかを理解しましょう。

たとえば，「5」は素数ですね。

そのとき，「5×5」，つまり25には，どんな約数があるでしょう。

もちろん，「1」と「25」を約数に持ちますが，他には「5」という約数があるだけなので，全部で３個の約数があります。

このように，pが素数だとしたら「p×p」という数は，「1」，「p×p」，「p」の，３個の約数を持つことになります。

つまり，「素数の平方数」が，約数を３個持つ，ということがわかりました。

素数を小さい方から５つ書くと，2，3，5，7，11です。

よって答えは11の平方数である，11×11＝121です。

反復問題(基本) 2

ワンポイント　素因数分解を見れば，簡単にわれる回数を求めることができます。

(1)　「3×3×5×5×5×7×11」を５でわると，５が１個へって「3×3×5×5×7×11」となります。

さらに「3×3×5×5×7×11」を５でわると，５がもう１個へって「3×3×5×7×11」となります。

さらに「3×3×5×7×11」を５でわると，５がもう１個へって「3×3×7×11」とななります。

つまり，５でわるごとに，素因数分解の５がへっていくわけです。

もとの「3×3×5×5×5×7×11」には５が３個ありますから，５で3回われることになります。

(2)　「4×5×6×7×8×9×10」は，まだ素因数分解されていません。

「5」と「7」はＯＫですが，「4」と「6」と「8」と「9」と「10」はまだ分解できます。

「4」は「2×2」に，「6」は「2×3」に，「8」は「2×2×2」に，
「9」は「3×3」に，「10」は「2×5」になりますから，

「4×5×6×7×8×9×10」
↓
「2×2×5×2×3×7×2×2×2×3×3×2×5」

となり，整理すると，「2×2×2×2×2×2×2×3×3×3×5×5×7」となります。

(1)と同じように，２でわるごとに，素因数分解の２がへっていきます。

「2×2×2×2×2×2×2×3×3×3×5×5×7」には「2」が７個ありますから，２で7回われることがわかりました。

反復問題(基本) 3

ワンポイント　既約(きやくぶんすう)分数とは，もうこれ以上約分できないような分数のことです。

(1)　125＝ 5×5×5 です。

(2)　(1)でわかった通り，125 を素因数分解すると，「5×5×5」のように，5 しかあらわれていません。

よって，$\dfrac{\square}{125}$ の分子を素因数分解したときに 5 がふくまれていたら，分母と分子はちらも 5 でわれるので，約分できてしまうことになります。

つまり，既約分数であるのは，分子が 5 でわれない数のときです。

たとえば 1 から 14 までの中で，5 でわり切れる数は，5，10 の 2 個あります。
この 2 個という個数は，「14÷5＝ 2　あまり　4」というわり算の答え(あまりは無視)で求めることができます。

同じようにして 1 から 124 までの場合も，5 でわるわり算をします。

124÷5＝ 24　あまり　4　ですから，1 から 124 までの中に 5 でわり切れる数は 24 個あります。

よって 5 でわり切れない数は，124－24＝ 100(個)ありますから，既約分数が 100 個あることがわかりました。

反復問題(基本) 4

ワンポイント　たとえば18が6の倍数なら，6は18の約数です。

(1)　[18，30] は，18 と 30 の最小公倍数を表していますから，90 です。

$$\begin{array}{r|rr} 6 & 18 & 30 \\ \hline & 3 & 5 \end{array}$$

〈30，42〉は，30 と 42 の最大公約数を表していますから，6 です。

$$\begin{array}{r|rr} 6 & 30 & 42 \\ \hline & 5 & 7 \end{array}$$

[18，30] − 〈30，42〉 = 90 − 6 = 84 です。

(2)　[24，〈36，54〉] の中の〈36，54〉は，36 と 54 の最大公約数を表していますから，18 です。

$$\begin{array}{r|rr} 18 & 36 & 54 \\ \hline & 2 & 3 \end{array}$$

よって，[24，〈36，54〉] = [24，18] です。

[24，18] は，24 と 18 の最小公倍数を表していますから，72 です。

$$\begin{array}{r|rr} 6 & 24 & 18 \\ \hline & 4 & 3 \end{array} \to 72$$

よって，答えは 72 です。

(3)　[10，□] = 20 とは，10 と□の最小公倍数が 20 であることを表しています。

よって，10 の倍数と□の倍数のうち，最も小さい公倍数が 20 です。

20 は□の倍数ですが，逆に，□は 20 の約数ともいえます。

20 の約数は，1，2，4，5，10，20 です。

つまり，□として考えられるのは，1，2，4，5，10，20 です。これらと 10 の最小公倍数が 20 になるかどうかをすべて確かめることによって，答えを求めることができます。

1 と 10 の最小公倍数は 10 ですから，ダメです。
2 と 10 の最小公倍数は 10 ですから，ダメです。
4 と 10 の最小公倍数は 20 ですから，ＯＫです。
5 と 10 の最小公倍数は 10 ですから，ダメです。
10 と 10 の最小公倍数は 10 ですから，ダメです。
20 と 10 の最小公倍数は 20 ですから，ＯＫです。

よって□として考えられるのは，4，20 です。

反復問題(練習) $\boxed{1}$ (1)

$\boxed{\text{ワンポイント}}$　約分すると分子が1になる分数には，どんな特ちょうがあるでしょう。

たとえば $\frac{4}{12}$ は約分すると，$\frac{1}{3}$ となり，分子が1になります。

同じように，$\frac{13}{52}$ は約分すると，$\frac{1}{4}$ となり，分子が1になります。

$\frac{4}{12}$ の場合は4は12の約数になっていて，$\frac{13}{52}$ の場合も13は52の約数になっています。

このように，分子が分母の約数になっているときに，約分すると分子は1になります。

(1)の場合は，分母は100です。

よって，分子が100の約数になっているときに，約分すると分子は1になるわけです。

56の約数は，1，2，4，5，10，20，25，50，100です。

よって，$\frac{1}{100}$，$\frac{2}{100}$，$\frac{4}{100}$，$\frac{5}{100}$，$\frac{10}{100}$，$\frac{20}{100}$，$\frac{25}{100}$，$\frac{50}{100}$，$\frac{100}{100}$ のときに，約分すると分子は1になります。

ところで，問題には「既約分数ではなく」と書いてありました。

$\frac{1}{100}$ は既約分数ですから，ダメです。

また，分数は $\frac{99}{100}$ までですから，$\frac{100}{100}$ はダメです。

ＯＫなのは，$\frac{2}{100}$，$\frac{4}{100}$，$\frac{5}{100}$，$\frac{10}{100}$，$\frac{20}{100}$，$\frac{25}{100}$，$\frac{50}{100}$ の7個の分数です。

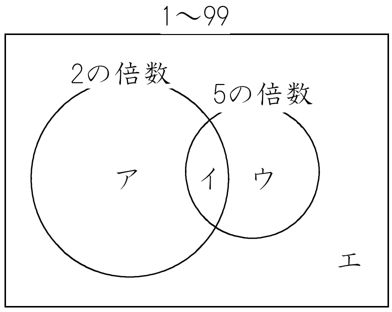
反復問題(練習) 1 (2)

ワンポイント　100 を素因数分解しましょう。

100 を素因数分解すると，2×2×5×5 です。

よって，分子が2の倍数，または5の倍数なら，約分することができます。

右のようなベン図を書いて考えましょう。



右の図のイの部分は，2の倍数でもあるし5の倍数でもあるので，2と5の公倍数です。

2と5の最小公倍数は10ですから，イの部分は10の倍数です。

99÷10＝9　あまり　9ですから，イの部分は9個です。

2の倍数は，99÷2＝49　あまり　1　→　49個です。
よってアの部分は，49－9＝40(個)です。

5の倍数は，99÷5＝19　あまり　4　→　19個です。
よってウの部分は，19－9＝10(個)です。

アは40個，イは9個，ウは10個ですから，(ア＋イ＋ウ)は，40＋9＋10＝59(個)です。

1から99までの99個のうち，約分できるような分子は59個あるのですから，約分できないような分子，つまり既約分数は，99－59＝40(個)あります。

反復問題(練習) 2 (1)

ワンポイント　連除法の形で解いていきますが，「思わぬ落とし穴」があります。

ＡとＢの最大公約数は６ですから，右のように，連除法の書き方をします。

6) Ａ　Ｂ

Ａ，Ｂを６でわったときの商を，それぞれアとイにします。

6) Ａ　Ｂ
　　ア　イ　＝２７０

ＡとＢの最小公倍数が 270 ですから，
6×ア×イ＝ 270 になります。

よって，ア×イは，270÷6＝ 45 になります。

そこで，ア×イ＝45 となるような（ア，イ）の組み合わせを，求めていきます。

（ア，イ）＝（1，45），（3，15），（5，9）の３通りが考えられます。

(9，5)などは，「ＢがＡより大きい」という条件に反します。

まず，（ア，イ）＝（1，45）の場合。
このとき，Ａ÷6＝ 1，Ｂ÷6＝ 45 ですから，
Ａ＝ 1×6＝ 6，Ｂ＝45×6＝ 270 となり，
(Ａ，Ｂ)＝(6，270) です。

6) Ａ　Ｂ
　　1　４５　＝２７０

次に，（ア，イ）＝（3，15）の場合。
この場合は，右の図のようになって，良さそうに見えますが，

6) Ａ　Ｂ
　　３　１５

3 も 15 も，両方とも 3 でわれるので，右の図のようになり，最大公約数が６でなければならないのに，6×3＝ 18 になってしまいます。
これでは，問題に合いません。

6) Ａ　Ｂ
3) ３　１５
　　1　5

(次のページへ)

次に，（ア，イ）＝（５，９）の場合。

$$\begin{array}{r|cc} 6 & A & B \\ \hline & 5 & 9 \end{array}$$

Ａ÷6＝5，Ｂ÷6＝9 ですから，
Ａ＝5×6＝30，Ｂ＝9×6＝54 となり，
（Ａ，Ｂ）＝(30，54) です。

以上のことから，答えとしてＯＫなのは，（6，270）と（30，54）です。

反復問題(練習) 2 (2)

ワンポイント　連除法の形で解いていきますが，やはり「思わぬ落とし穴」があります。

Ａ＋Ｂ＝90です。

$$\begin{array}{r|ccc} 9 & A & + & B \\ \hline & \text{ア} & & \text{イ} \end{array} =90$$

ＡとＢの最大公約数は９なので，ＡもＢも９でわり切れます。

ＡとＢを６でわったときの商をそれぞれア，イとすると，
ア＋イ＝90÷9＝10です。

$$\begin{array}{r|ccc} 9 & A & + & B \\ \hline & \text{ア} & + & \text{イ} \end{array} \begin{array}{l} =90 \\ =10 \end{array}$$

ＢはＡより大きいのでイはアより大きく，アとイの和が
8になるような(ア，イ)は，(1，9)，(2，8)，(3，7)，(4，6)です。

まず，（ア，イ）＝（１，９）の場合。
このとき，Ａ÷9＝1，Ｂ÷9＝９ですから，
Ａ＝1×9＝9，Ｂ＝9×9＝81 となり，
（Ａ，Ｂ)＝(9，81)です。

$$\begin{array}{r|cc} 9 & A & B \\ \hline & 1 & 9 \end{array}$$

次に，（ア，イ）＝（2，8）の場合。
このとき，2も8もまだ2でわれるので，
最大公約数が 9×2＝18になってしまい，
問題に合いません。

$$\begin{array}{r|cc} 9 & A & B \\ \hline 2 & 2 & 8 \\ \hline & 1 & 4 \end{array}$$

次に，（ア，イ）＝（3，７）の場合。
このとき，Ａ÷9＝3，Ｂ÷9＝７ですから，
Ａ＝3×9＝27，Ｂ＝7×9＝63 となり，
（Ａ，Ｂ)＝(27，63)です。

$$\begin{array}{r|cc} 9 & A & B \\ \hline & 3 & 7 \end{array}$$

次に，（ア，イ）＝（4，6）の場合。
このとき，2も8もまだ2でわれるので，
最大公約数が 9×2＝18になってしまい，
問題に合いません。

$$\begin{array}{r|cc} 9 & A & B \\ \hline 2 & 4 & 6 \\ \hline & 2 & 3 \end{array}$$

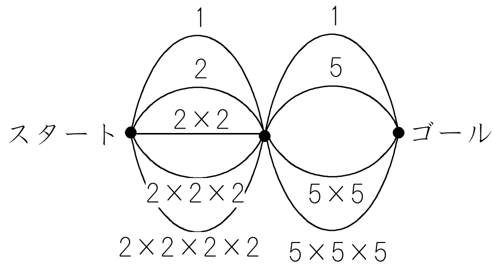
以上のことから，答えとしてＯＫなのは，(9，81)と(27，63)です。

反復問題(練習) 3

ワンポイント　素因数分解して，「通り道の図」を書いて解いていきましょう。

(1)　2000 を素因数分解すると，2×2×2×2×5×5×5 です。

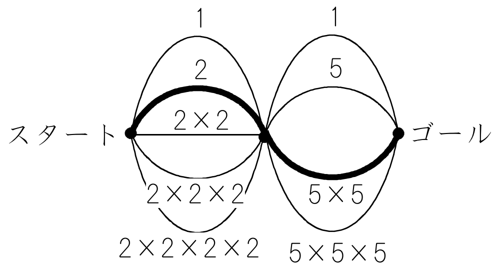
通り道の図にすると，右の図のようになります。



約数が何個あるかということと，スタートからゴールまでの通り道が何通りあるかということは同じです。

2に関係する道は５本，5に関係する道は４本ありますから，全部で 5×4＝ 20(通り)の通り方があり，約数の個数も 20 個です。

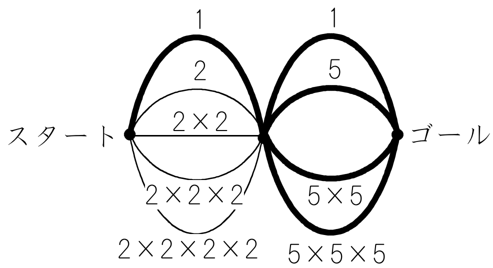
(2)　たとえば，右の図の太線のように通った場合，2×5×5＝ 50 という約数になり，偶数になってしまいます。



偶数になった理由は，「２の道」を通ったことにあります。

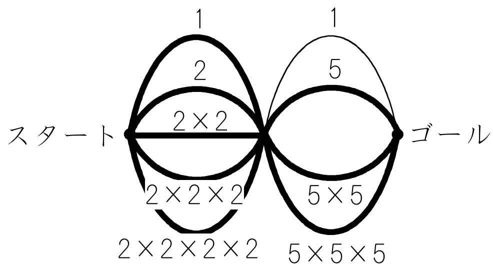
「２の道」,「2×２の道」, …を通らずにスタートからゴールまで進めば，約数は奇数になります。

右の図の太線部分を通るように進めばよいので，通り方は，1×4＝ 4(通り)あり，奇数の約数も 4 個あります。



(次のページへ)

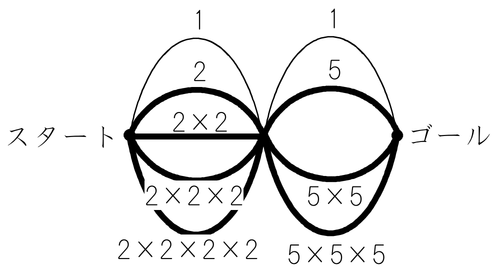
(3)　右の図の太線部分を通るように進めば，「5」「5×5」「5×5×5」のいずれかの道を通っているので，約数は必ず5の倍数になりますから，5×3＝15(通り)の通り方があり，約数の個数も15個です。



(4)　10＝2×5ですから，10の倍数になるためには，2でも5でもわり切れなければなりません。

よって，「2の道」「2×2の道」…のいずれかを必ず通り，「5の道」「5×5の道」…のいずれかを必ず通るようにすれば，10の倍数になります。

4×3＝12(通り)の通り方があり，約数の個数も12個です。



反復問題(練習) 4 (1)

ワンポイント　この問題は，「50の約数の個数」と密接な関係があります。

50番の電球は，1回目にはボタンを押しています。50は1の倍数だからです。

50番の電球は，2回目にもボタンを押しています。50は2の倍数だからです。

50番の電球は，3回目にもボタンを押しています。50は3の倍数ではないからです。

50番の電球は，4回目にはボタンを押していません。50は4の倍数ではないからです。

このように考えていくと，50が何かの倍数だったときに，ボタンを押すことがわかります。

50が「何か」の倍数だったときに，逆に「何か」は，50の約数です。

50の約数は，1，2，5，10，25，50の6個あります。(素因数分解して求めても，もちろんＯＫです。)

これらの回のときに，ボタンを押していることになりますから，ボタンを押したのは6回です。

反復問題(練習) 4 (2)

ワンポイント　あかりがついているということは，何回ボタンを押したのでしょう。

はじめ，すべての電球は消えています。

消えている電球に1回だけボタンを押したら，電球はつきます。

消えている電球に2回ボタンを押したら，電球はついて消えるので，結局消えています。

消えている電球に3回ボタンを押したら，電球はついて消えてつくので，結局ついています。

このように考えると，あかりがついている電球は，奇数回ボタンを押した電球です。

(1)でもわかった通り，たとえば約数が6個あったら，6回ボタンを押したわけですから，奇数回ボタンを押したということは，約数が奇数個あるということです。

約数が奇数個ある整数は，平方数です。

よってこの問題は，「1から50までの整数の中に，平方数が何個あるか」を求めることになります。

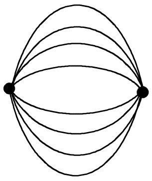
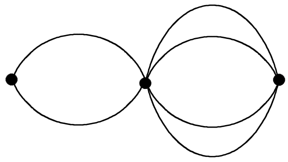
1×1＝1，2×2＝4，…，7×7＝49までが平方数で，8×8＝64は50をオーバーしています。

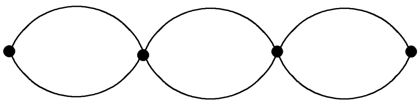
よって1から50までの中に平方数は7個ありますから，この問題の答えも7個です。

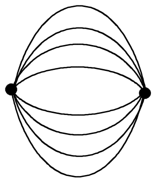
反復問題(練習) 4 (3)

ワンポイント　８回ボタンを押したということは，何を意味しているのでしょう。

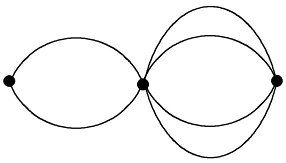
(1)，(2)でわかった通り，ボタンを８回押したということは，約数が８個あったということです。

道の通り方が８通りになるような形は，かか

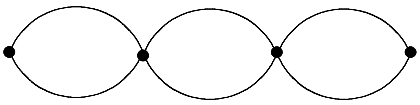
の形をしています。

の場合は，同じ数を７回かけた数を表していますから，

2×2×2×2×2×2×2＝128，…となりますが，50 以下にはそのような数はありません。

の場合は，素数をp，qとして，「p×q×q×q」の形をしています。

p＝２の場合，2×3×3×3＝54 は 50 オーバーなのでダメです。
p＝３の場合，3×2×2×2＝24 はＯＫ。
3×5×5×5＝375 は 50 オーバーなのでダメです。
p＝５の場合，5×2×2×2＝40 はＯＫ。
5×3×3×3＝135 は 50 オーバーなのでダメです。
p＝７の場合，7×2×2×2＝56 は 50 オーバーなのでダメです。

の場合は，素数をp，q，ｒとして，「p×q×r」の形をしています。

2×3×5＝30 はＯＫ。
2×3×7＝42 はＯＫ。
2×3×11＝66 は 50 オーバーなのでダメです。
2×5×7＝70 は 50 オーバーなのでダメです。
3×5×7＝105 は 50 オーバーなのでダメです。

よってあてはまるのは 24，40，30，42 ですから，答えは４個です。

反復問題(練習) 5 (1)

ワンポイント　計算のしかたをマスターしましょう。

$1\times2\times3\times4\times5\times6\times\cdots\cdots\times59\times60$

1，2，3，…，60 の数の中で，
2，4，6，…が，2 でわり切れます。
60÷2＝30 ですから，2 でわり切れる数は，30 個あります。

$1\times\cancel{2}^{1}\times3\times\cancel{4}^{2}\times5\times\cancel{6}^{3}\times\cdots\cdots\times59\times\cancel{60}^{30}$

2 で 30 回わったあとは，右のようになります。
新しく，1，2，…，30 という数があらわれました。
30÷2＝15 ですから，新しくあらわれた数の中で，2 でわり切れる数は 15 個あります。

さらに新しく，1，2，…，15 という数があらわれました。
15÷2＝7 あまり 1 ですから，さらに新しくあらわれた数の中で，2 でわり切れる数は 7 個あります。

６０÷２＝３０
３０÷２＝１５
１５÷２＝　７　あまり　１
７÷２＝　３　あまり　１
３÷２＝　１　あまり　１

このように考えて整理していくと，右の図のようになります。
2 でわり切れる回数は，全部で，
30＋15＋7＋3＋1＝56（回）です。

ですから，56＋1＝57(回目)に，2 でわり切れなくなります。

反復問題(練習) 5 (2)

ワンポイント　(1)と似ていますが，60÷4 などの計算をしてはいけません。

4を素因数分解すると，4＝2×2です。

ですから，「4でわる」ことは，「2でわって2でわる」ことと同じです。

(1)で，1×2×3×4×…×60 という数は，2で56回わり切れることがわかりました。

つまり，1×2×3×4×…×60 という数の中に，2が56個ふくまれている，ということです。

では，1×2×3×4×…×60 という数の中に，「2と2」の組は何組ふくまれているでしょう。

「2」が56個ふくまれているのですから，「2と2」の組は，56÷2＝28(組)ふくまれています。

よって，1×2×3×4×…×60 という数は，「2と2」で28回われる，つまり，4で28回われることがわかりました。

4でわり切れなくなるのは，28＋1＝29(回目)です。

反復問題(練習) 5 (3)

ワンポイント　慣れるまでは意味をよく考えて解き，慣れたら機械的に解きましょう。

まず，次のような超簡単な問題から解説します。

問題
10570000000 は，一の位から連続して「０」が何個ならびますか。

単純に一の位から並んでいる０の数をかぞえればよいので，答えは７個になります。
では，次の問題はどうでしょう。

問題
10570000000 は，10 で何回わり切れますか。

10 で１回ずつわっていくと，右はしの０が１個ずつなくなっていくので，７回われば 1057 となり，それ以上わり切れなくなります。よって，答えは７回です。

つまり，「一の位から連続して０が何個ならびますか。」という問題は，
「10 で何回わり切れますか。」という問題と，同じことになります。

さて，「10 でわる」というのは，10＝２×５ですから，「２でわって，さらに５でわる。」ことと同じです。

たとえば，3628800 という数が，２で８回わり切れて，５で２回わり切れることがわかっているとします。
次のようなイメージです。

3628800 ─┬ ２で　…　〇〇〇〇〇〇〇〇　　（８回）
　　　　　└ ５で　…　〇〇　　　　　　　　（２回）

それでは，3628800 という数は，「２でわって，さらに５でわる」ということを，何回できるでしょうか。

実は，２回しかできません。
まず１回目，２でわって５でわると，次のようになります。

3628800 ─┬ ２で　…　×〇〇〇〇〇〇〇　　（あと７回）
　　　　　└ ５で　…　×〇　　　　　　　　（あと１回）

もう一度，２でわって５でわると，次のようになります。

3628800 ─┬ ２で　…　××〇〇〇〇〇〇　　（あと６回）
　　　　　└ ５で　…　××　　　　　　　　（あと０回）

(次のページへ)

つまり，いくら２でわることが多く残っていたとしても，もう５でわることは不可能なので，「２でわって，さらに５でわる」ことは，２回しかできません。

ようするに，「２でわって，さらに５でわる」ことは，「２でわり切れる回数」と，「５でわり切れる回数」のうち，少ない回数の方しかできないことになります。

では，【60】＝１×２×３×４×……×59×60について，考えてみましょう。

【60】は，２で何回われるかは，(1)の問題と同様に計算することができます。

60÷２＝30
30÷２＝15
15÷２＝７　あまり　１
７÷２＝３　あまり　１
３÷２＝１　あまり　１

合計，30＋15＋７＋３＋１＝56(回)，２でわることができます。

次に，【60】が，5で何回われるかを，求めてみましょう。

60÷５＝12
12÷５＝２　あまり　２

合計，12＋２＝14(回)，５でわることができます。

結局，【60】は２で56回，５で14回，わることができました。
「２でわって，さらに５でわる」ことは，少ない回数の方しかできないので，14回しかできません。

よって，【50】は，一の位から連続して「０」が14個ならんでいることがわかりました。

ところで，答えを求めるときに，「２で何回われるか」と，「５で何回われるか」の，両方を計算して，少ない方である「５で何回われるか」の回数の方を答えにしました。
しかし，この問題のような，「１×２×…×Ｎ」の０がならぶ個数を求める問題の場合は，いつも必ず「２でわれる回数」よりも「５でわれる回数」の方が少ないので，「２でわれる回数」を求めることはしなくてＯＫです。

この問題の解き方を整理すると，右の図のようになります。

０が何個ならぶか
||
10で何回われるか
||
２と５で何回われるか
||
５で何回われるか

反復問題(練習) 5 (4)

ワンポイント　１×２×３×……×Ｎの中の，２の倍数に注目します。

【Ｎ】を２でわり続けたところ，11 回目ではじめて商が整数でなくなったものですから，10 回目までは２でわることができました。

【Ｎ】＝１×２×３×４×５×６×…×Ｎの１，２，３，４，５，６，…，Ｎにおいて，２でわり切れる数に注目します。

「２」は，２÷２＝１ですから，２で１回わり切れます。
【２】＝１×２は，２で１回だけわり切れることがわかりました。

「４」は，４÷２＝２，２÷２＝１ですから，２で２回わり切れます。
【４】＝１×２×３×４は，「２」で１回，「４」で２回，合計３回わり切れます。

「６」は，６÷２＝３ですから，２で１回わり切れます。
６÷２＝３だから３回としやすいので注意しましょう。
【６】＝１×２×３×４×５×６は，「２」で１回，「４」で２回，「６」で１回，合計４回わり切れます。

「８」は，８÷２＝４，４÷２=２，２÷２＝１ですから，２で３回わり切れます。
【８】＝１×２×３×…×８は，「６」までで４回わり切れ，「８」であと３回わり切れますから，合計で 4＋3＝７(回)わり切れます。

「10」は，10÷２＝５ですから，２で１回わり切れます。
【10】＝１×２×３×…×10 は，「８」までで７回わり切れ，「10」であと１回わり切れますから，合計で 7＋1＝８(回)わり切れます。

「12」は，12÷２＝６，６÷２＝３ですから，２で２回わり切れます。
【12】＝１×２×３×…×12 は，「10」までで８回わり切れ，「12」であと２回わり切れますから，合計で 8＋2＝10(回)わり切れます。

よって，【12】が，２で 10 回わり切れて，11 回目にはわり切れなくなる数ですから，答えになります。

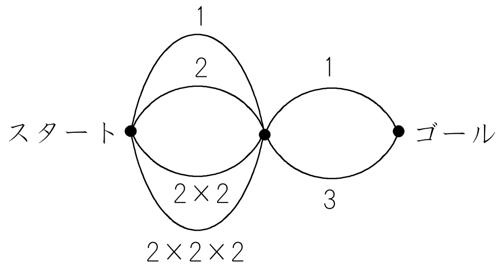
【13】もＯＫですが，【14】は，14 が２で１回わり切れるため，合計で 11 回わり切れることになるため，ダメです。

よってＮとして考えられる整数は，12，13 です。

トレーニング $\boxed{1}$

(1)　２×２×２×３のうち，２に関係するのは
「１の道」，「２の道」，「２×２の道」，
「２×２×２の道」の４通りがあり，

３に関係するのは「１の道」，「３の道」の
２通りの通り方があるので，

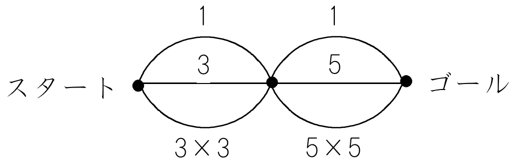


スタートからゴールまでの通り方は，４×２＝８(通り)あります。

よって約数の個数も，8 個になります。

(2)　３×３×５×５のうち，３に関係するのは，
「１の道」，「３の道」，「３×３の道」の
３通りの通り方があり，

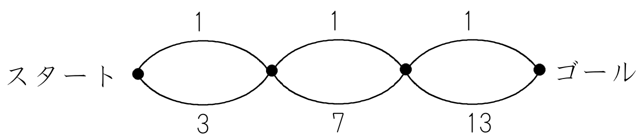
５に関係するのも，「１の道」，「５の道」，
「５×５の道」の３通りの通り方があるので，



スタートからゴールまでの通り方は，３×３＝９(通り)あります。

よって約数の個数も，9 個になります。

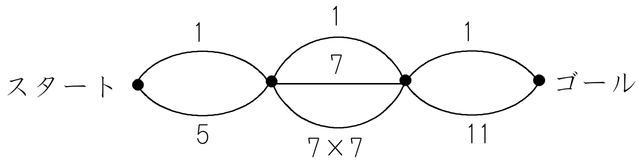
(3)　３×７×13 のうち，３に関係するのは，
「１の道」，「３の道」の２通り，
７に関係するのは，
「１の道」，「７の道」の２通り，
13 に関係するのは，
「１の道」，「13 の道」の２通りですから，
スタートからゴールまでの通り方は，２×２×２＝８(通り)あります。



よって約数の個数も，8 個になります。

(次のページへ)

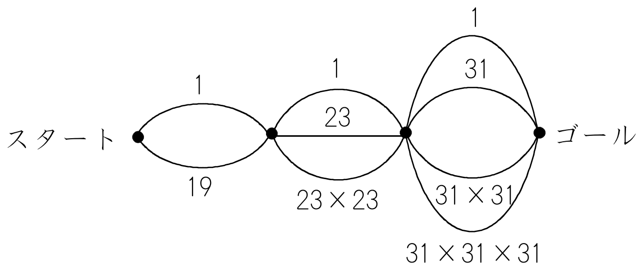
(4)　5×7×7×11 のうち，5 に関係するのは，
「1 の道」，「5 の道」 の 2 通り，
7 に関係するのは，
「1 の道」，「7 の道」「7×7 の道」 の
3 通り，
11 に関係するのは，「1 の道」，「11 の道」 の 2 通りですから，
スタートからゴールまでの通り方は，2×3×2＝ 12(通り)あります。



よって約数の個数も，12 個になります。

(5)　11×11×11×11×11 には，「1 の道」，「11 の道」，「11×11 の道」，「11×11×11 の道」，「11×11×11×11 の道」，「11×11×11×11×11 の道」 の 6 本の道がありますから，スタートからゴールまでの通り方は 6 通り，約数の個数も 6 個になります。

(6)　19×23×23×31×31×31 のうち，
19 に関係するのは，「1 の道」，「19 の道」
の 2 通り，
23 に関係するのは，
「1 の道」，「23 の道」「23×23 の道」 の
3 通り，
31 に関係するのは，「1 の道」，「31 の道」，
「31×31 の道」，「31×31×31 の道」 の　4 通りですから，
スタートからゴールまでの通り方は，2×3×4＝ 24(通り)あります。



よって約数の個数も，24 個になります。

トレーニング $\boxed{2}$

(1)　8 を素因数分解すると，2×2×2 です。

「1 の道」，「2 の道」，「2×2 の道」，「2×2×2 の道」の 4 本ありますから，道の通り方は 4 通りになり，約数の個数も 4 個です。

(2)　26 を素因数分解すると，2×13 です。

2 に関係する道は「1 の道」，「2 の道」の 2 通り，
13 に関係する道は「1 の道」，「13 の道」の 2 通りですから，道の通り方は，2×2＝4(通り)になり，約数の個数も 4 個です。

(3)　42 を素因数分解すると，2×3×7 です。

2 に関係する道は「1 の道」，「2 の道」の 2 通り，
3 に関係する道は「1 の道」，「3 の道」の 2 通り，
7 に関係する道は「1 の道」，「7 の道」の 2 通りですから，道の通り方は，2×2×2＝8(通り)になり，約数の個数も 8 個です。

(4)　50 を素因数分解すると，2×5×5 です。

2 に関係する道は「1 の道」，「2 の道」の 2 通り，
5 に関係する道は「1 の道」，「5 の道」，「5×5 の道」の 3 通りですから，道の通り方は 2×3＝6(通り)になり，約数の個数も 6 個です。

(5)　68 を素因数分解すると，2×2×17 です。

2 に関係する道は「1 の道」，「2 の道」，「2×2 の道」の 3 通り，
17 に関係する道は「1 の道」，「17 の道」の 2 通りですから，道の通り方は，3×2＝6(通り)になり，約数の個数も 6 個です。

(次のページへ)

(6)　162 を素因数分解すると，2×3×3×3×3 です。

　2に関係する道は「1の道」,「2の道」の2通り，
　3に関係する道は「1の道」,「3の道」,「3×3の道」,「3×3×3の道」,
「3×3×3×3の道」の5通りですから，道の通り方は，2×5＝10(通り)になり，
約数の個数も 10 個です。

(7)　189 を素因数分解すると，3×3×3×7 です。

　3に関係する道は「1の道」,「3の道」,「3×3の道」,「3×3×3の道」の4通り，
　7に関係する道は「1の道」,「7の道」の2通りですから，道の通り方は，
4×2＝8(通り)になり，約数の個数も 8 個です。

(8)　225 を素因数分解すると，3×3×5×5 です。

　3に関係する道は「1の道」,「3の道」,「3×3の道」の3通り，
　5に関係する道は「1の道」,「5の道」,「5×5の道」の3通りですから，道の通り方は，3×3＝9(通り)になり，約数の個数も 9 個です。

(9)　385 を素因数分解すると，5×7×11 です。

　5に関係する道は「1の道」,「5の道」の2通り，
　7に関係する道は「1の道」,「7の道」の2通り，
　11 に関係する道は「1の道」,「11 の道」の2通りですから，道の通り方は，
2×2×2＝8(通り)になり，約数の個数も 8 個です。

(10)　600 を素因数分解すると，2×2×2×3×5×5 です。

　2に関係する道は「1の道」,「2の道」,「2×2の道」,「2×2×2の道」の4通り，
　3に関係する道は「1の道」,「3の道」の2通り，
　5に関係する道は「1の道」,「5の道」,「5×5の道」の3通りですから，道の通り方は，4×2×3＝24(通り)になり，約数の個数も 24 個です。

トレーニング $\boxed{3}$

(1)　右の図のようになり，イ＝18÷6＝３です。

$$\begin{array}{r|ll} 6 & A & 18 \\ \hline & \text{ア} & \text{イ} \end{array} = 72$$

6×ア×イ＝72ですから，
ア＝72÷イ÷6＝72÷3÷6＝４です。

Ａ÷6＝ア ですから，Ａ＝ア×6＝４×6＝24です。

(2)　右の図のようになり，イ＝35÷7＝５です。

$$\begin{array}{r|ll} 7 & A & 35 \\ \hline & \text{ア} & \text{イ} \end{array} = 105$$

7×ア×イ＝105ですから，
ア＝105÷イ÷7＝105÷5÷7＝３です。

Ａ÷7＝ア ですから，Ａ＝ア×7＝３×7＝21です。

(3)　右の図のようになり，イ＝24÷4＝６です。

$$\begin{array}{r|ll} 4 & A & 24 \\ \hline & \text{ア} & \text{イ} \end{array}$$

右の図において，ア＝１のとき，Ａ＝1×4＝４です。これが，Ａとして考えられる整数の中で，最も小さい整数です。

$$\begin{array}{r|ll} 4 & A & 24 \\ \hline & \text{ア} & 6 \end{array}$$

Ａの２番目に小さい数は，ア＝２のときではありません。
ア＝２だと，２も６も２でわり切れるので，最大公約数が４ではなくなるのでダメです。

$$\begin{array}{r|ll} 4 & A & 24 \\ \hline & 2 & 6 \end{array}$$

Ａの２番目に小さい数は，ア＝３のときでもありません。
ア＝３だと，３も６も２でわり切れるので，最大公約数が４ではなくなるのでダメです。

$$\begin{array}{r|ll} 4 & A & 24 \\ \hline & 3 & 6 \end{array}$$

Ａの２番目に小さい数は，ア＝４のときでもありません。
ア＝４だと，４も６も２でわり切れるので，最大公約数が４ではなくなるのでダメです。

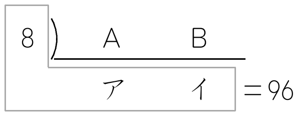
$$\begin{array}{r|ll} 4 & A & 24 \\ \hline & 4 & 6 \end{array}$$

ア＝５のときはＯＫです。
Ａ÷4＝５ですから，Ａ＝５×4＝20です。

$$\begin{array}{r|ll} 4 & A & 24 \\ \hline & 5 & 6 \end{array}$$

よって，Ａとして考えられる整数のうち，
最も小さい整数は４で，２番目に小さい整数は20であることがわかりました。

(4)　右の図のようになるので，8×ア×イ＝96です。

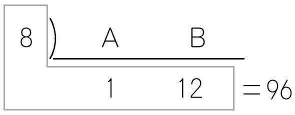


よって，ア×イ＝96÷8＝12です。

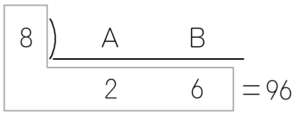
また，ＢはＡより大きいので，イはアより大きいです。

（ア，イ）の積が12で，イがアより大きいような(ア，イ)は，(1，12)，(2，6)，(3，4)が考えられます。

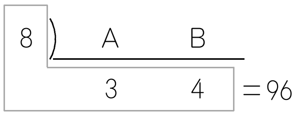
（ア，イ）＝(1，12)のときは，Ａ＝1×8＝8になり，ＡもＢも2けたであるという条件に反するので，ダメです。



（ア，イ）＝(2，6)のときは，2も6も2でわり切れるので，最大公約数が8ではなくなるので，ダメです。

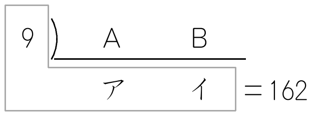


（ア，イ）＝(3，4)のときは，Ａ＝3×8＝24，Ｂ＝4×8＝32になり，ＯＫです。



よって，Ａは24です。

(5)　右の図のようになるので，9×ア×イ＝162です。

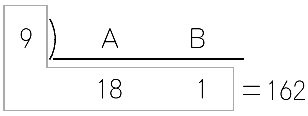


よって，ア×イ＝162÷9＝18です。

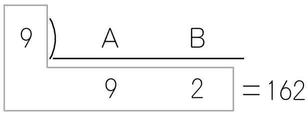
また，ＡはＢより大きいので，アはイより大きいです。

（ア，イ）の積が18で，アがイより大きいような(ア，イ)は，(18，1)，(9，2)，(6，3)が考えられます。

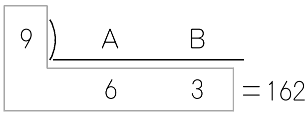
（ア，イ）＝(18，1)のときは，Ａ＝18×9＝162になり，ＡもＢも2けたであるという条件に反するので，ダメです。



（ア，イ）＝(9，2)のときは，Ａ＝9×9＝81，Ｂ＝2×9＝18となり，ＯＫです。



（ア，イ）＝(6，3)のときは，6も3も3でわれるので，最大公約数は9ではなくなるので，ダメです。



よって，Ａは81です。

トレーニング $\boxed{4}$

(1)　「2×3×3×7」の中には3が2個ありますから，3で2回わり切れます。

(2)　$4\times6\times8=\underbrace{2\times2}_{4}\times\underbrace{2\times3}_{6}\times\underbrace{2\times2\times2}_{8}$ の中には2が6個ありますから，2で6回わり切れます。

(3)　$5\times10\times15\times20\times25=5\times\underbrace{2\times5}_{10}\times\underbrace{3\times5}_{15}\times\underbrace{2\times2\times5}_{20}\times\underbrace{5\times5}_{25}$ の中には5が6個ありますから，5で6回わり切れます。

(4)　反復問題(練習)の $\boxed{5}$ (1)でも求めたように，

10÷3＝3，3÷3＝1ですから，3で 3＋1＝4(回)わり切れます。

実戦演習 1

(1)　540 と 900 の最大公約数は 180 です。

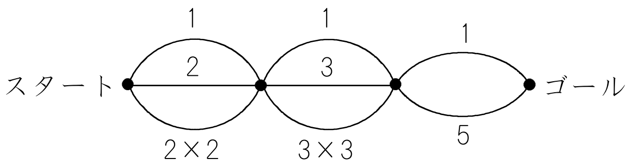
180 を素因数分解すると，2×2×3×3×5 です。

2 に関係するのは，「1 の道」，「2 の道」，「2×2 の道」の 3 通りあります。

3 に関係するのは，「1 の道」，「3 の道」，「3×3 の道」の 3 通りあります。

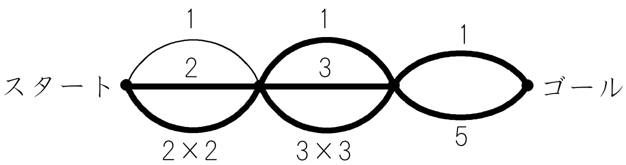
5 に関係するのは，「1 の道」，「5 の道」の 2 通りあります。

よって 180 の約数は 3×3×2＝18(個)あり，540 と 900 の約数が 18 個あることがわかりました。



(2)　右の図で，「2 の道」，「2×2 の道」を通ったら，約数は偶数になります。

よって，右の図の太線の道を通ったときに約数が偶数になるので，2×3×2＝12(個)の偶数の約数があります。



実戦演習 $\boxed{2}$

(1)　もし，「1×2×3×4×…×30」という数だったら，3で何回わり切れるかを求められますか？

反復問題(練習)の $\boxed{5}$ (1)でも求めたように，
30÷3＝10，10÷3＝3 あまり 1，3÷3＝1ですから，3で 10＋3＋1＝14(回)わり切れます。

ところがこの問題では，「1×2×3×4×…×30」という数ではなくて，10から始まっている「10×11×12×…×30」という数です。
よって，「1×2×3×4×…×30」の中の「1×2×3×4×…×9」がよけいです。

よけいな「1×2×3×4×…×9」は，3で何回わり切れるでしょう。
9÷3＝3，3÷3＝1ですから，3で 3＋1＝4(回)わり切れます。

右の図のようになるので，
「10×11×12×…×30」は，
3で 14－4＝10(回)わり切れます。

$$\underbrace{\underbrace{1\times2\times3\times4\times\cdots\times9}_{4\text{回}}\times\underbrace{10\times11\times12\times\cdots\times30}_{?\text{回}}}_{14\text{回}}$$

この問題は，「10×11×12×…×30」を3でわり続けると，何回目にわり切れなくなるかという問題ですから，答えは 10＋1＝11(回目)です。

(2)　反復問題(練習)の $\boxed{5}$ (3)でも求めたように，
整理すると右の表のようになります。

0が何個ならぶか
||
10で何回われるか
||
2と5で何回われるか
||
5で何回われるか

よって，「10×11×12×…×30」が5で何回わり切れるかという，(1)と同じような問題になります。

「1×2×3×4×…×30」が5で何回わり切れるかという問題だったら，30÷5＝6，6÷5＝1 あまり 1ですから，5で 6＋1＝7(回)わり切れます。
よけいな「1×2×3×4×…×9」は，9÷5＝1 あまり 4ですから，5で1回だけわり切れます。

右の図のようになるので，
「10×11×12×…×30」は，
5で 7－1＝6(回)わり切れます。

$$\underbrace{\underbrace{1\times2\times3\times4\times\cdots\times9}_{1\text{回}}\times\underbrace{10\times11\times12\times\cdots\times30}_{?\text{回}}}_{7\text{回}}$$

よって，「10×11×12×…×30」には，0が6個ならぶことがわかりました。

実戦演習 $\boxed{3}$

(1)　右の連除法において，180÷15＝12 ですから，イは 12 です。

$$\begin{array}{r|cc} 15 & A & 180 \\ \hline & ア & イ \end{array}$$

Ａは2けたの数です。

$$\begin{array}{r|cc} 15 & A & 180 \\ \hline & ア & 12 \end{array}$$

99÷15＝６ あまり ９ ですから，アは６までの数です。

ア＝１の場合，Ａ＝１×15＝15 で，ＯＫです。

$$\begin{array}{r|cc} 15 & A & 180 \\ \hline & 1 & 12 \end{array}$$

アＨ＝５の場合も，Ａ＝５×15＝75 で，ＯＫです。

$$\begin{array}{r|cc} 15 & A & 180 \\ \hline & 5 & 12 \end{array}$$

しかしア＝2，3，4，6の場合，アと 12 は，両方とも２や３でわれるので，最大公約数が 15 ではなくなるのでダメです。

したがって，Ａとして考えられる数は 15 と 75 です。

(2)　右のような連除法において，Ｂ×Ｃ＝1620 のとき，ア×イは何になるでしょう。

$$\begin{array}{r|ccc} 6 & B & \times & C \\ \hline & ア & & イ \end{array} =1620$$

アはＢを６でわった商で，イはＣを６でわった商ですから，ア×イは，Ｂ×Ｃを，６でわって，さらに６でわったものになります。

1620÷6÷6＝45 ですから，ア×イ＝45 です。

ＣはＢより大きいのですから，イはアより大きいです。

よって，ア×イ＝45 となる(ア，イ)の組は，(1，45)，(3，15)，(5，9) が考えられます。

このうち，(3，15)は，３も 15 も３でわり切れるので，ＢとＣの最大公約数が６ではなくなるのでダメです。

(ア，イ)＝(1，45) のとき，Ｂ＝1×6＝６になり，ＢもＣも２けたであるという条件に反することになるので，ダメです。

$$\begin{array}{r|ccc} 6 & B & \times & C \\ \hline & 1 & & 45 \end{array} =1620$$

(ア，イ)＝(5，9) のとき，Ｂ＝5×6＝30，Ｃ＝9×6＝54 になり，これはＯＫです。

$$\begin{array}{r|ccc} 6 & B & \times & C \\ \hline & 5 & & 9 \end{array} =1620$$

実戦演習 4

(1)　サンプルの【40，2】の場合は，40 を素因数分解すると 2×2×2×5 となり，2 を 3 個持っていますから，2 で 3 回わり切れることになるので，【40，2】＝3 です。

【324，3】の場合は，324 を素因数分解すると 2×2×3×3×3×3 となり，3 を 4 個持っていますから，3 で 4 回わり切れることになるので，【324，3】＝4 です。

(2)　【A，2】＝3 ですから，A は 2 で 3 回だけわり切れます。

よって，A を素因数分解すると，「2×2×2× 2 以外の素因数分解 」という形になるはずです。

2×2×2＝8 ですから，A＝「8× 2 以外の素因数分解 」となります。

A は 2 けたで，99÷8＝12 あまり 3 ですから， 2 以外の素因数分解 は，最大で 12 です。ただし，12 は 2×2×3 なので 2 を持っており， 2 以外の素因数分解 という形にはなっていません。

よって 2 以外の素因数分解 のところを，12 の次に大きい数である 11 にします。

すると，A＝8×11＝88 となりますから，A として考えられる数のうち，最も大きい数は 88 になります。

(3)　【A，3】＝2 ですから，A は 3 で 2 回だけわり切れます。

よって，A を素因数分解すると，「3×3× 3 以外の素因数分解 」という形になるはずです。

3×3＝9 ですから，A＝「9× 3 以外の素因数分解 」となります。

A は 2 けたで，99÷9＝11 ですから， 3 以外の素因数分解 は，最大で 11 です。

また， 3 以外の素因数分解 を 1 にすると，A＝9×1＝9 となり，1 けたになってしまうのでダメです。

よって， 3 以外の素因数分解 の部分は 2 から 11 まで。しかし，3，6，9 は素因数分解に 3 をふくんでいますからダメです。

結局， 3 以外の素因数分解 の部分でＯＫなのは，2，4，5，7，8，10，11 の 7 個です。

したがって，A＝「9× 3 以外の素因数分解 」も，7 個あることになります。

実戦演習 $\boxed{5}$

約数が３個…素数の平方数
約数が４個…「素数の立方数」か，「素数×別の素数」
約数が奇数個…平方数

(1)　約数が２個の数を，素数といいます。

約数が３個，４個，奇数個の整数にはどんなものがあるのかをしっかりおぼえておきましょう。

約数が奇数個のものは，「平方数」です。1×1＝2，2×2＝4，3×3＝9，…となります。

２けたなのは，4×4＝16，5×5＝25，6×6＝36，7×7＝49，8×8＝64，9×9＝81の，6個です。

(2)　「約数が７個」の「７」という数は，奇数です。

よってこの問題は，「約数が奇数個である２けたの整数のうち，約数が７個のものだけ求めなさい。」ということと同じです。

したがって，(1)で求めた16，25，36，49，64，81の中に答えがあるはずです。

16＝2×2×2×2ですから，約数は５個です。

25＝5×5ですから，約数は３個です。

36＝2×2×3×3ですから，約数は 3×3＝9(個)です。

49＝7×7ですから，約数は３個です。

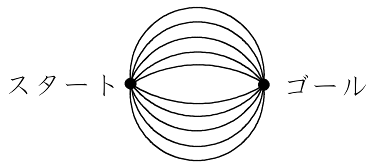
64＝2×2×2×2×2×2ですから，約数は７個です。

81＝3×3×3×3ですから，約数は５個です。

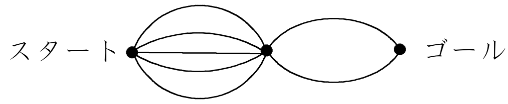
よって約数の個数が７個である２けたの整数は，64だけです。

(次のページへ)

(3)　通り道の問題にすると，約数が 10 個のものは，下の図ア，図イのいずれかの場合が考えられます。



図ア



図イ

図アの場合は，10 本の道は，素数を p として，「1 の道」，「p の道」，「p×p の道」，……，$\underbrace{\text{「p×p×p×p×p×p×p×p×p}}_{9個}$の道」があります。

よって，図アの場合の約数が 10 個ある整数は，「p×p×p×p×p×p×p×p×p」の形をしています。
p＝２のときでさえ，2×2×2×2×2×2×2×2×2＝ 512 ですから，図アの場合での２けたで約数が 10 個の数はありません。

図イの場合は，素数を p，q として，はじめの５本の道は，「1 の道」，「p の道」，「p×p の道」，「p×p×p の道」，「p×p×p×p の道」で，あとの２本の道は，「1 の道」，「q の道」です。

よって，図イの場合の約数が 10 個ある整数は，「p×p×p×p×q」の形をしています。

p＝２のときは，2×2×2×2×3＝ 48，2×2×2×2×5＝ 80 があてはまります。

p＝３のときは，q＝２のときでさえ，3×3×3×3×2＝ 162 となってしまいますから，ダメです。

よって約数の個数が 10 個である２けたの整数は，48，80 です。

実戦演習 $\boxed{6}$ (1)

このような問題の解き方は，3つあります。

①ベン図を利用する　　②最小公倍数を利用する　　③びっくり公式を利用する

このうち①で解くのはかなり面倒なので，②と③の解き方のみご紹介します。

②にしろ③にしろ，まず150を素因数分解して，2×3×5×5とします。
素因数分解の中に出てくる数は，2と3と5です。
その，2と3と5の最小公倍数は30です。

② $\frac{1}{150}$ から $\frac{30}{150}$ までの分数の中で，既約分数が何個あるかを求めます。

$\frac{1}{150}$, $\frac{7}{150}$, $\frac{11}{150}$, $\frac{13}{150}$, $\frac{17}{150}$, $\frac{19}{150}$, $\frac{23}{150}$, $\frac{29}{150}$ が既約分数ですから，8個あります。

$\frac{150}{150}$ までの中には150÷30＝5(セット)ありますから，既約分数は，8×5＝40(個)あることになります。

③ 1より小さい既約分数の個数を求めるときに，次のようなびっくり公式があります。

> 分母を素因数分解すると2，3，5が登場するときは，
>
> 1より小さい既約分数の個数＝分母×$(1-\frac{1}{2})\times(1-\frac{1}{3})\times(1-\frac{1}{5})$

素因数分解したときに登場する数によって，公式を変えます。

この問題では分母が150ですから，

$150\times(1-\frac{1}{2})\times(1-\frac{1}{3})\times(1-\frac{1}{5})=150\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=40$(個)となります。

なぜこの公式で既約分数の個数が求められるかは，難しいので解説しません。

実戦演習$\boxed{6}$(2)

$\dfrac{\square}{150}$ を約分すると，$\dfrac{4}{\text{何か}}$ という形になるような□を求めます。

150を素因数分解すると2×3×5×5で，4＝2×2ですから，$\dfrac{\square}{2\times3\times5\times5}=\dfrac{2\times2}{\text{何か}}$ です。

□が2を3個持っていれば，

$\dfrac{2\times2\times2\times\boxed{\text{ア}}}{2\times3\times5\times5}=\dfrac{\overset{1}{\cancel{2}}\times2\times2\times\boxed{\text{ア}}}{\underset{1}{\cancel{2}}\times3\times5\times5}=\dfrac{2\times2\times\boxed{\text{ア}}}{3\times5\times5}$ となり，分子に2×2＝4が残るのでＯＫです。ただし，$\boxed{\text{ア}}$ の部分が1にならなければなりません。

$\boxed{\text{ア}}$ の部分が1になるためには，$\dfrac{\overset{1}{\cancel{\boxed{\text{ア}}}}}{3\times5\times5}$ のように約分されないといけないのですが，3×5×5＝75ですから，$\dfrac{\overset{1}{\cancel{\boxed{\text{ア}}}}}{75}$ のように約分される必要があります。

よって，$\boxed{\text{ア}}$ の部分は75の約数です。

以上のことから，□は2×2×2×$\boxed{\text{ア}}$ の形をしていて，しかも$\boxed{\text{ア}}$ は75の約数になっているような数です。

2×2×2＝8，75の約数は1，3，5，15，25，75ですから，□としてあてはまる数は，8×1＝8，8×3＝24，8×5＝40，8×15＝120，8×25＝200，8×75＝600です。

ただし□は149までの数なので，8，24，40，120のみが答えです。