シリーズ5年上第1回・くわしい解説

「くわしい解説」は，少しでも理解の助けになればと思い，
作成しました。

説明がネチネチくどすぎると思うかも知れませんが，もともと
問題の意味がわからないから解説を読むのであって，解説が
省略してあったら，意味がないと思います。

すべての解説を読むのではなく，自分がわからない問題
だけ解説を読んで，理解するようにしてください。

目　次

倍数 …p.2
約数 …p.4
基本 1 (1) …p.6
基本 1 (2) …p.7
基本 1 (3) …p.8
基本 1 (4) …p.9
基本 1 (5) …p.10
基本 1 (6) …p.11
基本 1 (7) …p.11
基本 1 (8) …p.12
基本 2 …p.13
基本 3 …p.14
基本 4 …p.15
練習 1 …p.16
練習 2 …p.18
練習 3 …p.20
練習 4 …p.23
練習 5 …p.26
練習 6 …p.27

すぐる学習会
https://www.suguru.jp

シリーズの解説をする前に，基本的なことがらをまとめておきます。

倍数･公倍数･最小公倍数

□の**倍数**とは，□を整数倍した数のことです。

たとえば，4の倍数は，小さい方から順に，
（ア）　4，8，12，16，20，24，28，32，36，…
のことです。

6の倍数なら，小さい方から順に，
（イ）　6，12，18，24，30，36，42，…
となります。

公倍数とは，共通の倍数のことです。

たとえば，4と6の公倍数なら，（ア）と（イ）の両方に入っている数をさがして，
（ウ）　12，24，36，…
となります。

最小公倍数は，公倍数のうち，もっとも小さい数です。

たとえば，4と6の最小公倍数なら，（ウ）の数の中でもっとも小さい，12になります。

ところで，4と6の最小公倍数である「12」の倍数を，小さい方から順に書くと，
（エ）　12，24，36，…
となりますが，（エ）は（ウ）とまったく同じです。
このことから，

公倍数を求めるには，まず最小公倍数を求めて，次にその倍数をどんどん書いていけばよい。

ということがわかりました。

ちょっと練習してみましょう。

例題　24と42の公倍数を，小さい方から順に3つ書きなさい。

解答　まず，24の倍数をどんどん書いていきます。24，48，72，96，120，144，168，…
次に，42の倍数をどんどん書いていきます。42，84，126，168，…
すると，24の倍数と42の倍数に共通した数として，「168」が見つかりました。
この「168」が，24と42の最小公倍数です。
あとは，168の倍数を，小さい方から順に3つ書けばOKです。
よって，答えは　168，336，504　となります。

（解答終わり）

前ページの例題のように，とにかく最小公倍数さえ見つけることができたら，公倍数はかんたんに求められることがわかりました。

最小公倍数を求めることは，とても大切な役割を演じていることがわかりましたね。

ところで，最小公倍数を求めるには，「連除法（れんじょほう）」という，かんたんな方法があります。
連除法で，24と42の最小公倍数を求めてみることにしましょう。

右の図のように，わり算をさかさにしたような形を書きます。

$$\begin{array}{r|rr} & 24 & 42 \\ \hline \end{array}$$

両方の数をわることのできる数でわります。
24と42なら，両方とも2でわれます。
わった答えを，その下に書きます。

$$\begin{array}{r|rr} 2 & 24 & 42 \\ \hline & 12 & 21 \end{array}$$

さらに両方の数をわることのできる数があったら，わります。
いまは，両方とも3でわれます。

$$\begin{array}{r|rr} 2 & 24 & 42 \\ \hline 3 & 12 & 21 \\ \hline & 4 & 7 \end{array}$$

われなくなったら，右の図のように，**左側と下側の数をかけます**。
　$2 \times 3 \times 4 \times 7 = 168$　となり，例題で求めた最小公倍数と一致します。

$$\begin{array}{r|rr} 2 & 24 & 42 \\ \hline 3 & 12 & 21 \\ \hline & 4 & 7 \end{array}$$

わざわざ倍数をどんどん書くよりも，「連除法」の方がずっと楽ですね。

7と9の最小公倍数を求めるときなどの，7と9の両方をわる数がないときは，そのまま7と9をかけ算するだけで，最小公倍数になります。
よって，7と9の最小公倍数は，$7 \times 9 = 63$　です。

$$\begin{array}{r|rcr} & 7 & \times & 9 \\ \hline \end{array}$$

3つ以上の数の最小公倍数を求めるときは，注意することがあります。
6と27と30の最小公倍数を求める場合を例にして，説明しましょう。
3つの数とも，2でわることができますが，他には3つの数ともわることのできる数はありません。

$$\begin{array}{r|rrr} 3 & 6 & 27 & 30 \\ \hline & 2 & 9 & 10 \end{array}$$

こういう場合は，
2つでもわり切れる数があったら，わらなければならない。
というきまりがあります。
2や10は2でわり，2でわり切れない9はそのまま下におろします。
そして，左側と下側の数をかけて，$3 \times 2 \times 1 \times 9 \times 5 = 270$　となります。

$$\begin{array}{r|rrr} 3 & 6 & 27 & 30 \\ \hline 2 & 2 & 9 & 10 \\ \hline & 1 & 9 & 5 \end{array}$$

最小公倍数の求め方

左側と下側のかけ算をする。
3つ以上の場合は，2つでもわれる数があったら，わらなければならない。
そのとき，わり切れない数は，そのまま下におろす。

約数･公約数･最大公約数

□の**約数**とは，□をわり切る数のことです。

12の約数について，考えてみましょう。12は，1，2，3，4，6，12でわると，割り切れます。
12÷1＝12，　12÷2＝6，　12÷3＝4，
12÷4＝3，　12÷6＝2，　12÷12＝1

よって，12の約数は，
（ア）　1，2，3，4，6，12　です。

18の約数なら，
（イ）　1，2，3，6，9，18　です。

公約数とは，共通の約数のことです。

たとえば，12と18の公約数なら，（ア）と（イ）の両方に入っている数をさがして，
（ウ）　1，2，3，6
となります。

最大公約数は，公約数のうち，もっとも大きい数です。

たとえば，12と18の最大公約数なら，（ウ）の数の中でもっとも大きい，6になります。

ところで，12と18の最大公約数である「6」の約数をすべて書くと，
（エ）　1，2，3，6
となりますが，（エ）は（ウ）とまったく同じです。
このことから，

公約数を求めるには，まず最大公約数を求めて，次にその約数を書けばよい。

ということがわかりました。

例題で，点検してみましょう。
例題　24と40の公約数を，すべて書きなさい。
解答　24の約数をすべて書くと，1，2，3，4，6，8，12，24　です。
40の約数をすべて書くと，1，2，4，5，8，10，20，40　です。
24の約数と40の約数に共通した数は，1，2，4，8　です。
よって，24と40の公約数は，1，2，4，8　です。
ところで，24と40の最大公約数は8で，8の約数は，1，2，4，8　ですから，
確かに24と40の公約数は，最大公約数である8の約数になっています。
（解答終わり）

前ページの例題のように，とにかく最大公約数さえ見つけることができたら，公約数はかんたんに求められることがわかりました。

最大公約数を求めることは，とても大切な役割を演じていることがわかりましたね。

ところで，最大公約数を求めるには，「連除法(れんじょほう)」という，かんたんな方法があります。
連除法で，12と18の最大公約数を求めてみることにしましょう。

右の図のように，わり算をさかさにしたような形を書きます。

$$\begin{array}{r|rr} & 12 & 18 \\ \hline \end{array}$$

両方の数をわることのできる数でわります。
12と18なら，両方とも2でわれます。
わった答えを，その下に書きます。

$$\begin{array}{r|rr} 2 & 12 & 18 \\ \hline & 6 & 9 \end{array}$$

さらに両方の数をわることのできる数があったら，わります。
いまは，両方とも3でわれます。

$$\begin{array}{r|rr} 2 & 12 & 18 \\ \hline 3 & 6 & 9 \\ \hline & 2 & 3 \end{array}$$

われなくなったら，右の図のように，**左側の数だけをかけます。**
　２×３＝６　となり，最大公約数は6になります。

$$\begin{array}{r|rr} 2 & 24 & 42 \\ \hline 3 & 12 & 21 \\ \hline & 4 & 7 \end{array}$$

わざわざ約数をどんどん書くよりも，「連除法」の方がずっと楽ですね。

7と9の最大公約数を求めるときなどの，7と9の両方をわる数がないときは，7も9も1では割り切れるので，最大公約数は1になります。

$$\begin{array}{r|rr} 1 & 7 & 9 \\ \hline \end{array}$$

3つ以上の数の最大公約数を求めるときは，注意することがあります。
6と27と30の最大公約数を求める場合を例にして，説明しましょう。
3つの数とも，3でわることができますが，他には3つの数ともわることのできる数はありません。(2と9の2つだけなら2で割り切れますが。)

$$\begin{array}{r|rrr} 3 & 6 & 27 & 30 \\ \hline & 2 & 9 & 10 \end{array}$$

こういう場合は，

2つでもわり切れる数があったとしても，わってはいけない。

というきまりがあります。
最小公倍数の場合は，2つでもわってよいというきまりだったので，全然違いますね。

最大公約数の求め方

左側だけかけ算をする。
3つ以上の場合は，全部を割り切る数でないと，わってはいけない。

基本 1 (1)

ワンポイント　約数を一気に２つずつゲットしていく方法をマスターしましょう。

とつぜんですが，105 は５でわり切れます。105÷5＝ 21 となります。
よって，5 は 105 の約数です。
ところが，105÷5＝ 21 という式から，105÷21 ＝ 5 ということもわかります。
よって，21 も 105 の約数になります。

このように，1 つ約数がわかれば，わり算をすることで，約数がもう 1 つわかってきます。
このことを考えて，約数をどんどん求めてみます。

まず，105÷1＝ 105 ですから，105 の約数として，1 と 105 をゲットできます。
次に，105÷3＝ 35 ですから，3 と 35 をゲットできます。
105÷5＝ 21 は，すでにやりましたね。これで，5 と 21 もゲットしました。
さらに，105÷7＝ 15 ですから，7 と 15 もゲットできます。
7 と 15 のあいだには，8，9，10，11，12，13，14 の数がありますが，どれも 105 をわり切ることはできません。

以上のことから，105 の約数は，1，3，5，7，15，21，35，105 の 8 個です。

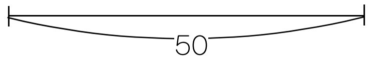
（補足…上の説明では，約数をすべて書いて，その個数を数えて求めたのですが，5年下で，
「素因数分解」を利用する解き方を学習します。お楽しみに！）

基本 $\boxed{1}$ (2)

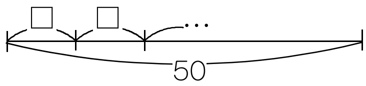
$\boxed{\text{ワンポイント}}$　とても基本問題とは思えない，まちがいやすい問題です。しっかり理解してください。

まず，50 を わるのか，50 で わるのか，その違いに気をつけましょう。

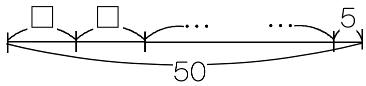
「50 を わると 5 あまる」というのは，たとえば 50 円のお金を持っていて，



そのお金で，1 個何円かのあめを，できるだけたくさん買うことにします。



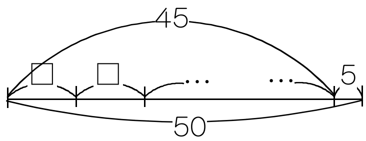
すると，最後に残ったお金が，5 円になる，ということです。



では 1 個何円のあめを買ったでしょう，という問題です。

□に入る数は，50 の約数ではありません。なぜなら，□は 50 をぴったりわり切る数ではないからです。（ぴったりわり切る数を，約数というのでしたね。）

でも，□は 50－5＝ 45 なら，ぴったりわり切ります。
つまり，□は 45 の約数なのです。



45÷1＝ 45　→　1 と 45
45÷3＝ 15　→　3 と 15
45÷5＝ 9　→　5 と 9

よって，45 の約数は，1，3，5，9，15，45 の，6 個です。

しかし，この 6 個がすべて答えになるわけではありません。

なぜなら，「最後に残ったお金が，5 円になる。」という条件に合わない答えがあるからです。
最後に 5 円残る，ということは，1 個のねだんは，5 円よりも高いはずです。
なぜなら，1 個が 5 円以下だと，残っている 5 円で，もっとあめを買えてしまうからです。

よって，1 個のねだんは，45 の約数である 1，3，5，9，15，45 のうち，5 より大きい，9，15，45 の 3 個のみが答えになります。

このような問題の解き方を整理しておきます。

50 をわると 5 あまる数を求める

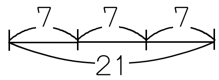
50 円お金を持っていて，品物をできるだけたくさん買うことにすると，5 円あまる。
50－5＝ 45 の約数。
あまりの「 5 」よりも大きいものだけが答えになる。(5 もダメ)

基本 $\boxed{1}$ (3)

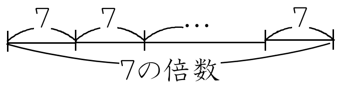
$\boxed{\text{ワンポイント}}$　「最も近い」ということばの意味を理解しましょう。

7の倍数とは，7，14，21，28，…… のように，7を整数倍してできる数のことです。

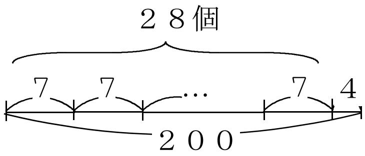
たとえば右の図は，7を3倍してできる，21という7の倍数です。



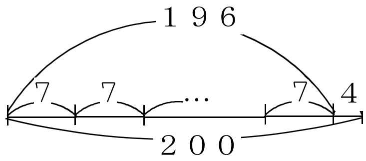
このように，7の倍数というのは，7が何個か集まってできる数のことです。



この問題は，200に近い7の倍数を求める問題でした。
200÷7＝ 28 あまり 4 ですから，200の中に7は28個入っていて，4あまります。
もし200の中に7が28個ぴったり入っていたとしたら，200は7の倍数なのですが，実際は4あまっているので，200は7の倍数ではありません。

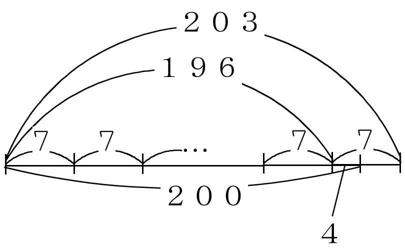


ということは，200から4を取り除いた，200－4＝ 196 なら，ちょうど7が28個ぶん入っているので，7の倍数になります。
よって，答えは196であると考えていいような気がしますが，じつは，このように求めた196が，答えにならないことがあるのです。

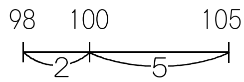


196という数は，7が28個ぶんぴったりでした。
ですから，確かに196は7の倍数です。
でも，7がもう1個あって，7が29個になっても，7の倍数であることはまちがいありません。
7が29個のときは，200をオーバーしてしまいますが，オーバーしても，200に近ければ，それが答えなのです。

7が28個で196でしたから，もう1個7があると，
196＋7＝ 203 になります。
（　7×29＝ 203　というやり方もあるし，
200の場合は4あまっていたから，あと
7－4＝ 3 を加えて，200＋3＝ 203　と
いうやり方もあります。）



結局，200に近い7の倍数の候補としては，200よりも小さい196と，200よりも大きい203が考えられました。
196は200よりも4も小さく，203は200よりも3しか大きくないので，200に最も近い数は，203になります。



基本 1 (4)

ワンポイント　「１から 300 まで」ならかんたんですが…。

もし，「１から 300 までの中に，６の倍数が何個入っていますか。」という問題だったら，300÷6＝50 ですから，50 個になります。

しかし実際は，１からではなく 50 からです。

$\boxed{50,\ 51,\ 52,\ \cdots\cdots\cdots,\ 299,\ 300}$

このような問題では，１から 49 までをつけ加えて，１から 300 までにします。

1，2，3，………，48，49，$\boxed{50,\ 51,\ 52,\ \cdots\cdots\cdots,\ 299,\ 300}$

１から 50 までをつけ加えると，50 がダブってしまってうまくいかないことがあるので，注意しましょう。

１から 300 まででは，６の倍数は 50 個ありました。
１から 49 まででは，49÷6＝8 あまり 1 ですから，8 個あります。

1，2，3，………，48，49，$\boxed{50,\ 51,\ 52,\ \cdots\cdots\cdots,\ 299,\ 300}$

8 個

50 個

よって，50 から 300 までには，６の倍数は 50－8＝42（個）あります。

1，2，3，………，48，49，$\boxed{50,\ 51,\ 52,\ \cdots\cdots\cdots,\ 99,\ 100}$

8 個　　42個

50 個

基本 $\boxed{1}$ (5)

$\boxed{\text{ワンポイント}}$　３つ以上の数の最小公倍数を求める場合，「2つでもわってよい」ことに注意しましょう。

①　12と15の両方とも，「３の段の九九」にありますから，３でわれます。
よって，右のような連除法により，最大公約数は３になります。
最小公倍数は，３×４×５＝60です。
最大公約数は，左側だけのかけ算で，最小公倍数は左と下のかけ算です。まちがえないようにしましょう。

$$\begin{array}{r|rr} 3 & 12 & 15 \\ \hline & 4 & 5 \end{array}$$

②　28と42の両方とも，２でわれることはすぐわかります。
２でわると，14と21になりました。
14と21は，両方とも７でわれます。
よって，右のような連除法により，最大公約数は２×７＝14になります。
最小公倍数は，２×７×２×３＝84です。

$$\begin{array}{r|rr} 2 & 28 & 42 \\ \hline 7 & 14 & 21 \\ \hline & 2 & 3 \end{array}$$

③　３つの数の最大公約数を求める問題です。
この場合も連除法で求めます。
答えは ２×３＝６です。
最大公約数は，３つとも割れなければならないことに注意しましょう。

$$\begin{array}{r|rrr} 2 & 36 & 48 & 54 \\ \hline 3 & 18 & 24 & 27 \\ \hline & 6 & 8 & 9 \end{array}$$

次に，３つの数の最小公倍数を求めます。
この場合も連除法で求めます。
３つとも割れる数で割った状態が，右の図です。
しかしここでわり算を終わらせてはいけません。なぜなら，

$$\begin{array}{r|rrr} 2 & 36 & 48 & 54 \\ \hline 3 & 18 & 24 & 27 \\ \hline & 6 & 8 & 9 \end{array}$$

最小公倍数を求める場合は，２つでもわれる数があったらわらなければならない。 そのとき，わり切れない数は，そのまま下におろす。

というきまりがあるからです。

この問題の場合も，６と８だけは，２でわれます。
わり切れない９は，そのまま下におろします。
さらに，３と９は，３でわれます。
わり切れない４は，そのまま下におろします。
すると，右のような連除法になり，
最小公倍数は，２×３×２×３×１×４×３＝432 です。

$$\begin{array}{r|rrr} 2 & 36 & 48 & 54 \\ \hline 3 & 18 & 24 & 27 \\ \hline 2 & 6 & 8 & 9 \\ \hline 3 & 3 & 4 & 9 \\ \hline & 1 & 4 & 3 \end{array}$$

基本 $\boxed{1}$ (6)

$\boxed{\text{ワンポイント}}$　4と6との公倍数は，何の倍数でしょう。

4と6の最小公倍数は12なので，4と6の公倍数は，12の倍数です。

たとえば，1から20までの整数のうち，3の倍数ならば，20÷3＝ 6　あまり　2　ですから，6個あります。

同じようにして，1から200までの整数のうち，12の倍数ならば，200÷12＝ 16　あまり　8　ですから，16個あります。

基本 $\boxed{1}$ (7)

$\boxed{\text{ワンポイント}}$　等差数列のＮ番目を求める公式をおぼえていますか？

8でわると3あまる整数は，3，11，19，27，…… のように，8ずつふえる等差数列になっています。

等差数列のＮ番目は，$\boxed{\text{はじめの数＋ふえる数×（Ｎ－１）}}$ の公式で求めることができます。

はじめの数は3，ふえる数は8，20番目の数を求めるのですからＮを20にして，

はじめの数＋ふえる数×（Ｎ－１）＝ 3＋ 8×（20－１）＝ 3＋8×19＝ 3＋152＝ 155　になります。

基本 $\boxed{1}$ (8)

$\boxed{\text{ワンポイント}}$　「2けた」や，「小さい整数から」など，問題の条件に注意しましょう。

6でわると2あまる数は，「□÷6＝△　あまり 2」の□ですから，「6×△＋2」となる数です。
つまり，6の倍数に2をプラスした数です。

9でわると2あまる数は，「□÷9＝△　あまり 2」の□ですから，「9×△＋2」となる数です。
つまり，9の倍数に2をプラスした数です。

よって，6でわっても9でわっても2あまる数は，6と9の公倍数に2をプラスした数です。

6と9の最小公倍数は18ですから，18の倍数に2をプラスした数ということになります。

2けたの18の倍数を小さい方から3つ書くと，18，36，54です。

よって18の倍数に2をプラスした数は，18＋2＝20，36＋2＝38，54＋2＝56 になります。

$\boxed{\text{注意}}$　いちばん小さい数である20を求めたあと，20×2＝40，20×3＝60としてはいけません。
20は確かに「6でわっても9でわっても2あまる数」ですが，20を2倍すると，「6でわっても9でわっても，2×2＝4あまる数」になってしまい，問題に合わなくなってしまいます。

基本 2

ワンポイント　(1)はかんたんですが，(2)はまちがいやすい問題です。

(1)　40÷6＝ 6 あまり 4 ですから，40 枚の折り紙を 6 人の子どもに配ると，6 枚ずつ配ることができて，4 枚あまります。

(2)　はじめに 40 枚ありました。
子どもに配ったら，最後に 5 枚あまりました。
ということは，40－5＝ 35(枚)を，子どもに配ったことになります。

子どもの人数は，35 枚をあまりなく配ることのできるような人数です。
つまり，35 の約数です。

35 の約数は，1，5，7，35 です。

よって子どもの人数は，1 人，5 人，7 人，35 人のいずれかです。

ところで「5 枚あまった」ということは，子どもの人数は 5 人より多くいたことになります。
なぜなら，もし子どもが 5 人だったとしたら，折り紙が 5 枚あまるのはおかしいのです。あまった 5 枚を，5 人に 1 枚ずつ配ることができるので，折り紙はあまらないからです。

また，もし子どもが 4 人だったとしても，折り紙が 5 枚あまるのはおかしいのです。あまった 5 枚を，4 人に 1 枚ずつ配り，本当のあまりは 1 枚になってしまうからです。

このようにして，子どもの人数が 5 人以下であることは，ありえないことがわかりました。
子どもの人数は，1 人，5 人，7 人，35 人のいずれかだったのですが，1 人と 5 人はありえないことになり，ありえるのは 7 人，35 人のいずれかです。

問題には，最も少ない人数を答えることになっているので，答えは 7 人です。

基本 3

ワンポイント　１回目は48秒後ではなく，スイッチを入れたときであることに注意しましょう。

(1)　１回目に同時に光るのは，スイッチを入れたときです。

①　Aはそのあと６秒ごとに光り，Bは16秒ごとに光るのですから，AもBも光るのは，６と16の最小公倍数である，48秒後です。

②　６と16の最小公倍数は48ですから，AとBが同時に光るのは，48秒ごとです。

１回目はスイッチを入れたときで，２回目は48秒後です。
３回目は，48×２＝96（秒後）です。
４回目は，48×３＝144（秒後）です。

注意　48×４＝192（秒後）のように答えやすいです。１回目はスイッチを入れると同時であることに注意しましょう。

(2)　１分は60秒ですから，５分は，60×５＝300(秒)です。

よって，300秒間に，AとBは何回同時に光るのかを求めることになります。

(1)でも求めた通り，AとBは，６と16の最小公倍数である48秒ごとに，同時に光ります。

300÷48＝６　あまり　12　ですから，300秒の中に48秒は６回入っています。

しかし答えは６回ではありません。なぜなら，スイッチを入れたとき（０秒）のときにも同時に光っているからです。

その１回ぶんをプラスして，答えは　６＋１＝７（回）です。

基本 $\boxed{4}$

$\boxed{\text{ワンポイント}}$　最も小さい数を求める，カンタンな方法はありません。「やるしかない」のです。

(1)　「５でわると２あまる」数は，まず，あまりの「２」を書き，次に「５でわると」の「５」を，どんどんプラスすることで，どんどん書くことができます。

あまり
↓
2， 7， 12， 17， 22， 27， ……
＋5　＋5　＋5　＋5

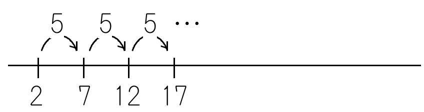
「６でわると４あまる」数も，まず，あまりの「４」を書き，次に「６でわると」の「６」を，どんどんプラスすることで，どんどん書くことができます。

あまり
↓
4， 10， 16， 22， 28， ……
＋6　＋6　＋6　＋6

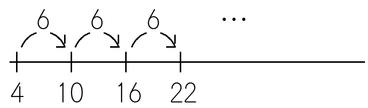
両方の数列をよく見ると，両方に「22」という数が入っていることがわかります。
よって，最も小さい数は 22 であることがわかりました。

(2)　(1)で，最も小さい数は 22 であることがわかりましたが，さて次の数は何でしょうか。

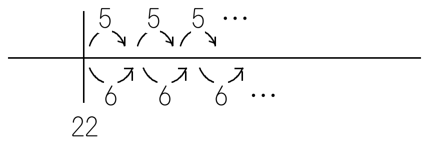
それは，図を書くことでわかってきます。
「５でわると２あまる」数は，右図のように２からスタートして，５ずつピョンピョン飛んでいくイメージです。



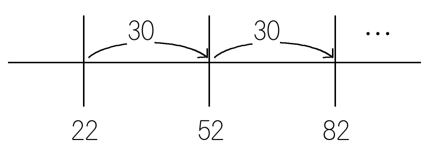
「６でわると４あまる」数は，右図のように４からスタートして，６ずつピョンピョン飛んでいくイメージです。



(1)で求めた 22 から，「５ピョン」と「６ピョン」，とはねていって，いつまた同じ場所に着地するか，ということになります。



５と６の最小公倍数は 30 ですから，22 から 30 ピョンして，22＋30＝ 52 のところに着地，次は，52＋30＝ 82 のところに着地，ということをくり返します。

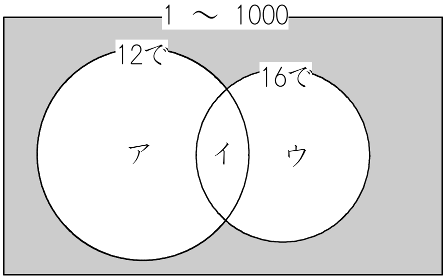


22，52，82，……　という，等差数列になります。
この等差数列の，６番目を求める問題です。
６番目までくらい，全部書いてもたいしたことはありませんが，公式で求めると，次のようになります。
６番目の数＝はじめ＋ふえる×（N－１）＝22＋30×（6－１）＝22＋30×5＝22＋150＝ 172。

練習 1 (1)

ワンポイント　ベン図を書きましょう。

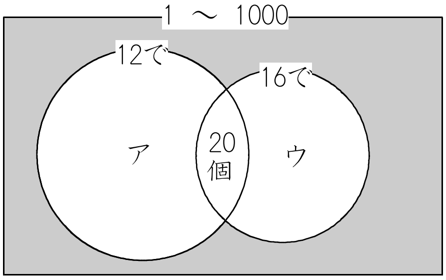
12 でも 16 でもわり切れない整数は，右のベン図の，かげをつけた部分です。



右の図のイは，12 でも 16 でもわり切れる整数をあらわします。

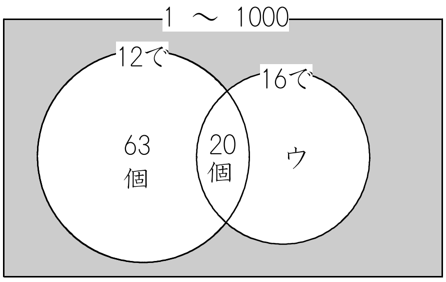
12 と 16 の最小公倍数は 48 ですから，イは 48 の倍数をあらわします。

1000÷48＝ 20　あまり　40　ですから，イには 40個の整数があてはまります。



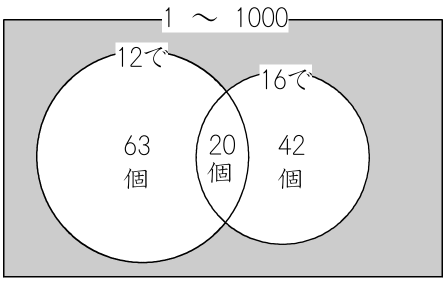
1000÷12＝ 83　あまり　4　ですから，12 の倍数は 83 個あります。

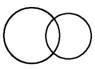
よってアは，83－20＝ 63(個)です。



1000÷16＝ 62　あまり　8　ですから，16 の倍数は 62 個あります。

よってウは，62－20＝ 42(個)です。



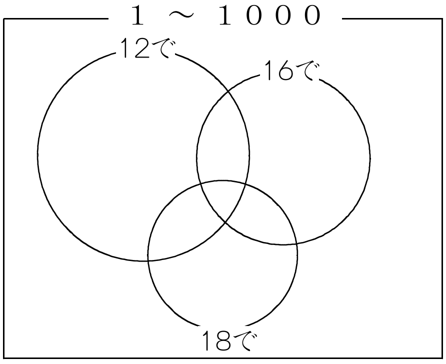
右のベン図で  の部分は，63＋20＋42＝ 125(個)です。

全体は，1 から 1000 までの 1000 個ですから，かげをつけた部分の個数は，1000－125＝ 875(個)です。

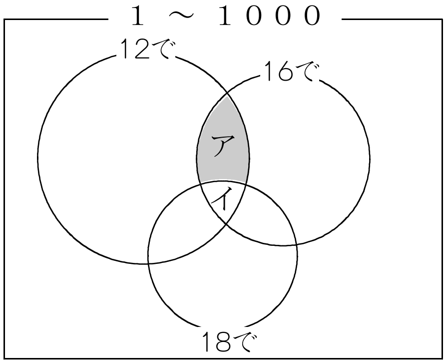
練習 1 (2)

ワンポイント　ベン図を書きましょう。

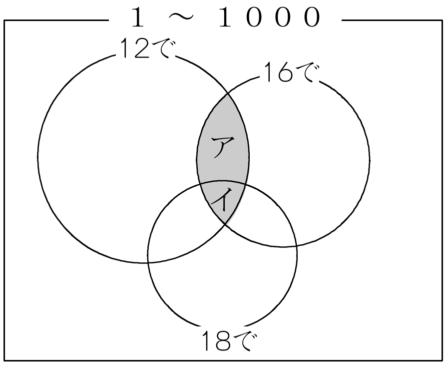
右のベン図のマルは，それぞれ 12·16·18 でわり切れる数を表しています。



「12 でも 16 でもわり切れて，18 ではわり切れない数」は，右図のかげをつけた部分(ア)になります。
(ア)は，12 でも 16 でもわり切れる数 (ア＋イ) の個数から，12 でも 16 でも 18 でもわり切れる数(イ)の個数を引いた，残りの個数になります。

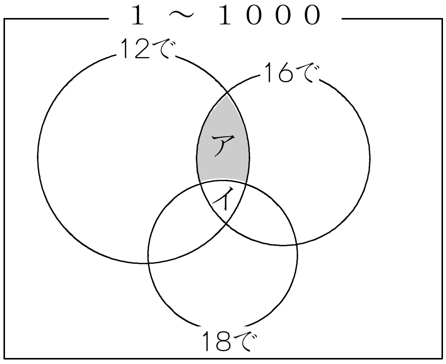


(ア＋イ) は，12 でも 16 でもわり切れる数でした。
12 と 16 の最小公倍数は 48 ですから，
1000÷48＝ 20 あまり 40
よって，(ア＋イ) の個数は，20 個です。



(イ)は，12 でも 16 でも 18 でもわり切れる数でした。
12 と 16 と 18 の最小公倍数は 144 ですから，
1000÷144＝ 6 あまり 136
よって，(イ) の個数は，6 個です。

以上のことから，(ア)の個数は，20－6＝ 14 (個)になります。



練習 $\boxed{2}$ (1)

$\boxed{\text{ワンポイント}}$　最も小さい数を求める，カンタンな方法はありません。「やるしかない」のです。

まず，最も小さい数を求めましょう。

「５をたすと８でわり切れる」数は，まず「５をたすと８になる」数である，８－５＝３です。あとは，「８でわり切れる」の「８」を，どんどんプラスすることで，どんどん書くことができます。

あまり
↓
3，11，19，……
＋8　＋8

「１をひくと９でわり切れる」数は，まず１です。（１は１をひくと０になり，０は９でわり切れます。）

あとは，「９でわり切れる」の「９」を，どんどんプラスすることで，どんどん書くことができます。

あまり
↓
1，10，19，……
＋9　＋9

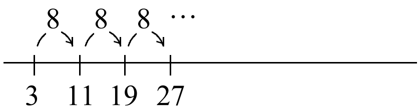
両方の数列をよく見ると，両方に「19」という数が入っていることがわかります。

よって，最も小さい数は 19 であることがわかりました。

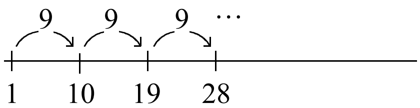
最も小さい数は 19 であることがわかりましたが，さて次の数は何でしょうか。

それは，図を書くことでわかってきます。

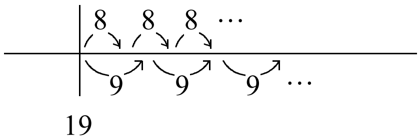
「５をたすと８でわり切れる」数は，右図のように３からスタートして，８ずつピョンピョン飛んでいくイメージです。



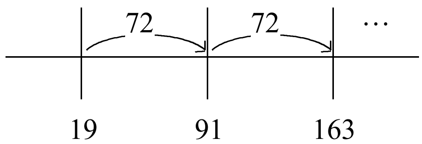
「１をひくと９でわり切れる」数は，右図のように１からスタートして，９ずつピョンピョン飛んでいくイメージです。



19 から，「８ピョン」と「９ピョン」，とはねていって，いつまた同じ場所に着地するか，ということになります。



８と９の最小公倍数は 72 ですから，19 から 72 ピョンして，19＋72＝91　のところに着地，次は，91＋72＝163　のところに着地，ということをくり返します。



19，91，163，……　という，等差数列になります。

この等差数列の，5番目を求める問題です。

５番目までくらい，全部書いてもたいしたことはありませんが，公式で求めると，次のようになります。

５番目の数＝はじめ＋ふえる×（N－１）＝ 19＋72×（5－1）＝ 19＋72×4＝ 19＋288＝ 307。

練習 2 (2)

ワンポイント　等差数列のN番目の公式を使って求めましょう。

「５をたすと８でわり切れ，１をひくと９でわり切れる」数は，(1)により，次のような等差数列になることがわかりました。

19，91，163，…

この数列の中で，2000 に最も近い数を求めるのが，(2)の問題です。

等差数列の，N番目の公式を使って求めましょう。

N番目の数＝はじめ＋増える×（N－１）

数列　19，91，163，…　の，はじめの数は 19 で，増える数は 72 です。何番目に 2000 が登場するかを求めるのですから，

19＋72×（N－１）＝ 2000

あとは逆算をしていきます。
2000－19＝ 1981
1981 ÷ 72＝ 27.5…　四捨五入して，28
28＋1＝ 29

よって，29 番目の数が，2000 に最も近い数です。
もう一度公式にあてはめて，最も近い数を求めます。Nは 29 にします。
29 番目の数＝ 19＋72×（29－1）＝ 2035

よって，2000 に最も近い数は，2035 になります。

練習 $\boxed{3}$ (1)

$\boxed{\text{ワンポイント}}$　「あまる」という意味を，しっかり考えましょう。

えんぴつは 48 本ありました。
子どもたちに配ったところ，3 本あまりました。
48 本あって 3 本あまったのですから，配ったのは，48－3＝ 45（本）です。
子どもの人数は，45 本をぴったり配ることができるような人数ですから，45 の約数です。

ボールペンは 76 本ありました。
子どもたちに配ったところ，1 本あまりました。
76 本あって 1 本あまったのですから，配ったのは，76－1＝ 75（本）です。
子どもの人数は，75 本をぴったり配ることができるような人数ですから，75 の約数です。

以上のことから，子どもの人数は，45 と 75 の公約数です。
最大公約数は 15 で，15 の約数は 1，3，5，15 ですから，子どもの人数は 1 人か，3 人か，5 人か，15 人です。

ところで「えんぴつが 3 本あまった」ということは，子どもの人数は 3 人より多くいたことになります。
なぜなら，もし子どもが 3 人だったとしたら，えんぴつが 3 本あまるのはおかしいのです。あまった 3 本を，3 人に 1 本ずつ配ることができるので，えんぴつはあまらないからです。

また，もし子どもが 1 人だったとしても，えんぴつが 3 本あまるのはおかしいのです。あまった 3 本を，1 人に 3 本配り，本当は何もあまらないことになってしまうからです。

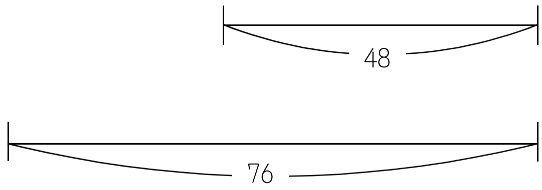
このようにして，子どもの人数が 3 人以下であることは，ありえないことがわかりました。
子どもの人数は，1 人，3 人，5 人，15 人のいずれかだったのですが，1 人と 3 人はありえないことになり，ありえるのは 5 人，15 人のいずれかです。

最も少ない人数を答えるのですから，答えは 5 人です。

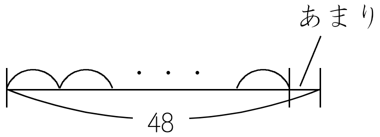
練習 3 (2)

ワンポイント　よく出る問題ですが，解き方をよく忘れる問題でもあります。

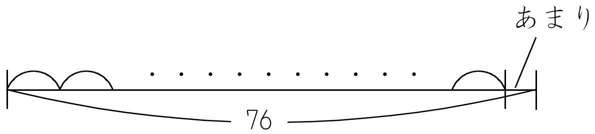
右図のように，48と76という数があって，



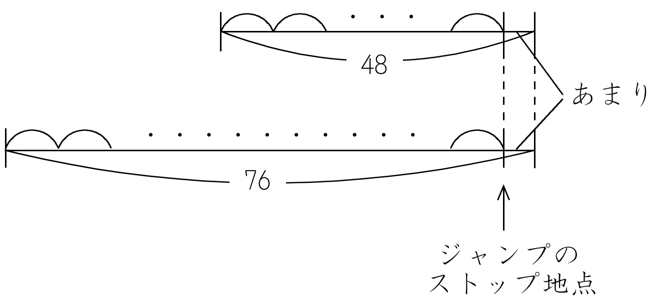
48の方を，ある整数でわっていくと，
いくらかのあまりが出たそうです。



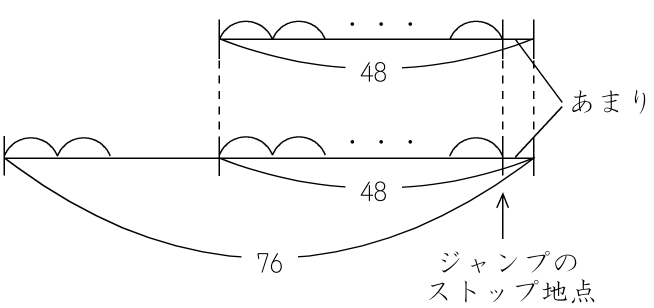
76の方も，同じ整数でわっていくと，
同じあまりが出たそうです。



同じあまりが出たのですから，
　　というのを「ピョンとジャンプしているようす」だとすると，どちらも同じ地点で，ジャンプがストップしています。

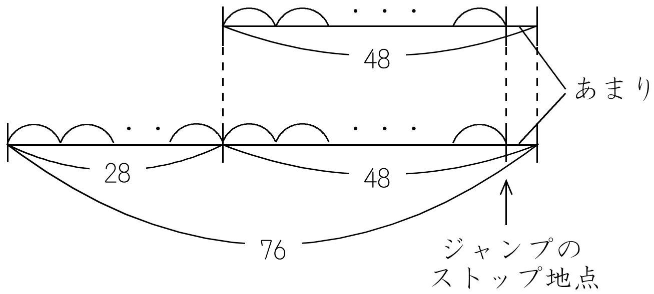


48の図を76の図の方にコピーすると，
右図のようになります。



（次のページへ）

すると，76－48＝28 の部分は，あまりなく
⌒ でぴったりわり切れることになります。



よって，⌒ は，28 の約数になります。

28 の約数は，1，2，4，7，14，28 です。
ところが，これらがすべて答えになるわけではありません。
問題文に「どちらも１本以上あまり」と書いてあったので，

48÷1＝48，76÷1＝76　→　わり切れる
48÷2＝24，76÷2＝38　→　わり切れる
48÷4＝12，76÷4＝19　→　わり切れる
48÷7＝6 あまり 6，76÷7＝10 あまり 6　→　わり切れない
48÷14＝3 あまり 6，76÷14＝5 あまり 6　→　わり切れない
48÷28＝1 あまり 20，76÷28＝2 あまり 20　→　わり切れない

となり，1 と 2 と 4 の場合は，わり切れてしまいます。

よってわり切れないのは，7，14，28 でわったときですが，最も少ない人数である 7 人を答えることになります。

※　解き方をかんたんにまとめると，次のようになります。

48 と 76 のどちらをわっても，同じあまりが出る整数の求め方
・76－48＝28
・28 の約数を求める
・約数のうち，48 や 76 をわり切るものはダメ

なお，次のような問題もよく出題されます。

517 と 613 と 877 のどれをわっても，同じあまりが出る整数の求め方
・ 613－517＝96，877－613＝264
・ 96 と 264 の公約数を求める
・ 公約数のうち，517 や 613 や 877 をわり切るものはダメ

練習 $\boxed{4}$ (1)

$\boxed{\text{ワンポイント}}$　とにかくどんどん書いていくことが大切です。

3 本ずつたばねると 2 本あまるということは，「 3 でわると 2 あまる 」ことと同じです。

2 ，5 ，8 ，11 ，14 ，……

＋3 ＋3 ＋3 ＋3

5 本ずつたばねると 4 本あまるということは，「 5 でわると 4 あまる 」ことと同じです。

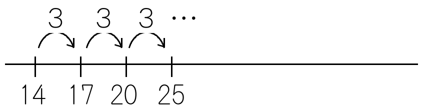
4 ，9 ，14 ，……

＋5 ＋5

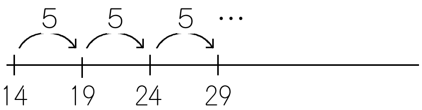
すると，両方の数列に，14 が共通して入っていることがわかります。
よって，「 3 でわると 2 あまり，5 でわると 4 あまる，最も小さい数 」は 14 であることがわかります。

最も小さい数は 14 であることがわかりましたが，さて次の数は何でしょうか。

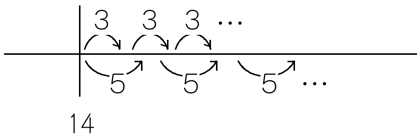
それは，図を書くことでわかってきます。
「 3 でわると 2 あまる 」数は，右図のように 14 からスタートして，3 ずつピョンピョン飛んでいくイメージです。



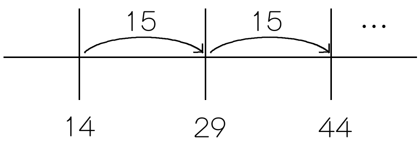
「 5 でわると 4 あまる 」数は，右図のように 14 からスタートして，5 ずつピョンピョン飛んでいくイメージです。



14 から，「 3 ピョン 」と「 5 ピョン 」，とはねていって，
いつまた同じ場所に着地するか，ということになります。



3 と 5 の最小公倍数は 15 ですから，14 から 15 ピョンして，
14＋15＝ 29 のところに着地，次は，29＋15＝ 44 の
ところに着地，ということをくり返します。
(★) 14，29，44，……　という，等差数列になります。



ところで問題文には，「 7 本ずつたばねると 12 たばできて $\boxed{\text{エ}}$ 本あまる。」と書いてありました。
12 のたばができるということは，7×12＝ 84(本)はあり，13 のたばまではできないので，
7×13＝ 91(本)はない，つまり，90 本まで，ということがわかります。
つまり，えんぴつの本数は，84 本以上 90 本以下，という範囲であることがわかります。
(★)の数列を書いていくと，14，29，44，59，74，89，104…となり，範囲に入っているのは 89 本だけです。よって，$\boxed{\text{ア}}$ の答えは 89 本であることがわかりました。

$\boxed{\text{イ}}$ は 89÷3＝29 あまり 2 ですから 29 で，$\boxed{\text{ウ}}$ は 89÷5＝17 あまり 4 ですから 17 です。
$\boxed{\text{エ}}$ は 89÷7＝12 あまり 5 ですから 5 です。

練習 $\boxed{4}$ (2)

$\boxed{\text{ワンポイント}}$　練習 $\boxed{4}$ (1)と同様に，ピョンピョン飛んでいきましょう。

３人ずつ分けていくと，１人あまるような数は，次のような数列になります。

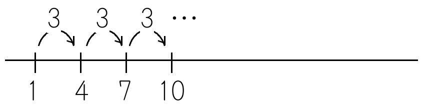
１，４，７，……
＋３ ＋３

４人ずつ分けていくと，１人あまるような数は，次のような数列になります。

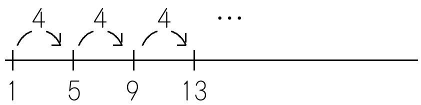
１，５，９，……
＋４ ＋４

両方の数列に共通する，最も小さい数は，１です。

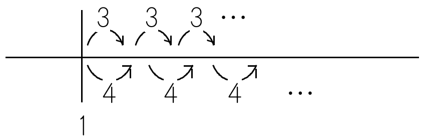
３人ずつ分けていくと，１人あまるような数は，
１から３ずつピョンピョンしてできる数です。



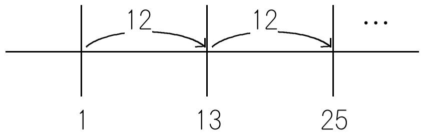
４人ずつ分けていくと，１人あまるような数は，
１から４ずつピョンピョンしてできる数です。



よって，「３人ずつ分けると１人あまり，４人ずつ分けても１人あまる数」というのは，１から３ずつピョン，４ずつピョンして，同じ場所に着地するのはどこか，という問題と同じです。



３と４の最小公倍数は12なので，１から12ピョンして，１＋12＝13，さらに12ピョンして，13＋12＝25，ということをくり返します。



（次のページへ）

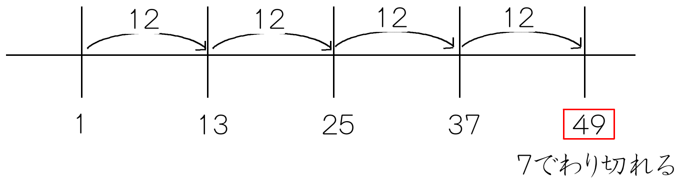
よって，「３人ずつ分けると１人あまり，４人ずつ分けても１人あまる数」というのは，１から始まって，12ずつ増える等差数列になります。

1，13，25，…

しかも，７人ずつ分けるとあまりなく分けられなければならないのですから，この数列を，７でわり切れる数が出てくるまで，どんどん書いていく必要があります。

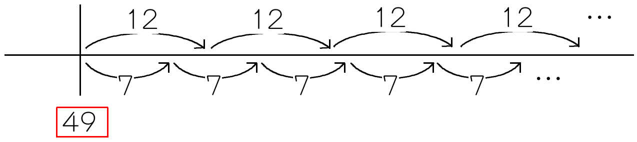
1，13，25，37，$\boxed{49}$，…

よって，「３人ずつ分けると１人あまり，４人ずつ分けても１人あまり，しかも，7人ずつ分けるとあまりなく分けられる」数の中で，最も小さい数は「49」であることがわかりました。

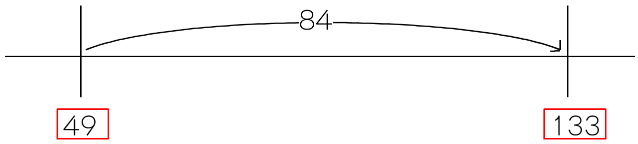


49からあとも，12ずつピョンピョンはくり返されます。

また，７でわり切れる数は７ずつピョンピョン飛んでいきます。



すると，12と７の最小公倍数は84ですから，84だけ飛ぶと，同じ場所で着地することになります。



その場所は，49＋84＝133　です。

次に着地するのは，133＋84＝217　です。

次は，217＋84＝301　です。

次は，301＋84＝385　です。

次は，385＋84＝469　です。

次は，469＋84＝553　です。

次は，553＋84＝637　です。

よって，500人以上600人以下であてはまるものは，553人であることがわかりました。

練習 5

ワンポイント　最小公倍数が大切な役割を演じます。

(1)　1 分は 60 秒ですから，5 分は，60×5＝ 300（秒）です。

300÷35＝ 8　あまり　20　ですから，Aは 5 分で 8 枚を印刷します。

300÷42＝ 7　あまり　6　ですから，Bは 5 分で 7 枚を印刷します。

よってAとB合わせて，8＋7＝ 15（枚）を印刷することになります。

(2)　Aは 35 秒ごと，Bは 42 秒ごとに印刷します。

35 と 42 の最小公倍数は 210 ですから，210 秒を 1 セットにします。

1 セットあたり，Aは　210÷35＝ 6（枚），Bは　210÷42＝ 5（枚）を印刷します。

AとB合わせて，6＋5＝ 11（枚）を印刷します。

この問題は，150 枚を印刷し終える時間を求める問題です。

150÷11＝ 13　あまり　7　ですから，13 セットと，あと 7 枚あまっています。

1 セットは 210 秒ですから，13 セットは，210×13＝ 2730（秒）です。

つまり，2730 秒たったときに，あと 7 枚印刷すれば終了，という状態になっています。

Aは，35 秒，70 秒，105 秒，140 秒，……のときに印刷します。
Bは，42 秒，84 秒，126 秒，168 秒，……のときに印刷します。

よって，あと 7 枚の印刷は，1 枚目は 35 秒（A），2 枚目は 42 秒（B），3 枚目は 70 秒（A），4 枚目は 84 秒（B），5 枚目は 105 秒（A），6 枚目は 126 秒（B），7 枚目は 140 秒（A）となりますから，7 枚目を印刷したのは，140 秒のAです。

かかった時間は，2730＋140＝ 2870（秒）です。
2870÷60＝ 47　あまり　50　ですから，150 枚目を印刷したのは，47 分 50 秒後になります。

また，2870 秒のあいだにBは 42 秒ごとに印刷するのですから，Bが印刷したのは，
2870÷42＝ 68　あまり　14　により，68 枚です。

練習 $\boxed{6}$

$\boxed{\text{ワンポイント}}$　１回目にベルが同時になるのは，午前９時であることに注意しましょう。

(1)　Aは12分ごと，Bは18分ごと，Cは27分ごとに鳴るのですから，A，B，Cが同時に鳴るのは，12と18と27の最小公倍数である，108分ごとです。

１回目にベルが同時に鳴るのは，午前９時であることに注意しましょう。
２回目にベルが同時に鳴るのは，午前９時の108分後です。
３回目にベルが同時に鳴るのは，午前９時の，108×2（分後）です。

このように考えると，５回目に同時に鳴るのは，午前９時の，108×4（分後）です。

$\boxed{\text{注意}}$　植木算ということですね。

108×4＝432（分）で，432÷60＝７　あまり　12　ですから，432分後＝７時間12分後です。

午前９時＋７時間12分＝午前16時12分＝午後**4時12分**に，５回目に同時に鳴ることがわかりました。

(2)　午前９時の次にAとBとCが同時に鳴るのは，午前９時の108分後であることが，(1)でわかりました。

108分のあいだに，Aは12，24，36，48，60，72，84，96，108分のときに鳴ります。
Bは，18，36，54，72，90，108分のときに鳴ります。
Cは，27，54，81，108分のときに鳴ります。

Bのベルだけが鳴るのは，108分の間では，18分後と，90分後の2回です。

(2)の問題は，Bのベルだけが15回目に鳴る時刻を求める問題です。

１セット108分の間に２回ずつあるので，15÷2＝７　あまり　１　ですから，７セットと，あと１回です。
７セットは，108×7＝756（分）で，あと１回は，さらにその18分後です。

よって，午前９時の，756＋18＝774(分後)です。

774÷60＝12　あまり　54　ですから，774分後＝12時間54分後です。

よって答えは，午前９時＋12時間54分＝午前21時54分＝午後**9時54分**です。