シリーズ6年上第13回・くわしい解説

目　次

すぐる学習会
https://www.suguru.jp

重要問題チェック $\boxed{1}$

ボールやマメ，おはじきなどに置きかえて考えると，わかりやすくなります。

「60をわると6あまる」というのは，

「60個のボールを子どもたちに同じ数ずつ配ると，6個あまりました。」ということと同じです。

はじめに60個あって6個あまったのですから，配ったのは，60－6＝54(個)です。

よって，54個をぴったり配ることができるような人数がいました。

子どもの人数は，54の約数です。

54 の約数は，1，2，3，6，9，18，27，54です。

しかしこれらがすべて答えというわけではありません。なぜなら，たとえば子どもの人数が3人だったら，ボールが6個あまるわけがないからです。子どもの人数が3人だったら，あまっている6個をまだ配ることができるので，ボールが6個あまることはありえません。

しかし，子どもの人数が9人だったらＯＫです。あまっている6個を9人には配れないからです。

つまり，子どもの人数は「6」より多い必要があります。(「6」もダメです。)

したがってＯＫなのは，54の約数である1，2，3，6，9，18，27，54のうち，6より大きい数である9，18，27，54です。

重要問題チェック $\boxed{2}$

「連除法」で最大公約数を求めます。

最大公約数の場合は，すべてをわれる数でわります。

（最小公倍数の場合は，２個でもわれる数があったらわります。）

(1)

$$\begin{array}{r|rr} 2 & 30 & 48 \\ \hline 3 & 15 & 24 \\ \hline & 5 & 8 \end{array}$$

$\downarrow$

6

(2)

$$\begin{array}{r|rrr} 2 & 112 & 196 & 252 \\ \hline 2 & 56 & 98 & 126 \\ \hline 7 & 28 & 49 & 63 \\ \hline & 4 & 7 & 9 \end{array}$$

$\downarrow$

28

重要問題チェック $\boxed{3}$

赤い折り紙は 52 枚ありました。子どもに配ったら，4 枚あまりました。

子どもに，52－4＝ 48(枚)配ったことになります。
子どもの人数は，48 枚をぴったり配ることのできるような人数なので，48 の約数です。

子どもの人数は 48 の約数だからといって，48 の約数をすべて書くということはしないようにしましょう。その理由は，あとでわかります。

青い折り紙は 79 枚ありました。子どもに配ったら，7 枚あまりました。

子どもに，79－7＝ 72(枚)配ったことになります。
子どもの人数は，72 枚をぴったり配ることのできるような人数なので，72 の約数です。

ここでも，子どもの人数は 72 の約数だからといって，72 の約数をすべて書くということはしないようにしましょう。

結局，子どもの人数は，48の約数でもあるし，72の約数でもあります。

つまり，48と72の公約数です。

48と72の最大公約数は24ですから，子どもの人数は24の約数です。

48の約数や72の約数をすべて書くことはしない理由がわかりましたか。ムダだからです。最大公約数である24の約数のみ書けばそれでＯＫなのです。

24の約数は，1，2，3，4，6，8，12，24です。

しかしこれらがすべて答えというわけではありません。なぜなら，たとえば子どもの人数が３人だったら，青い折り紙が７枚あまるわけがないからです。子どもの人数が３人だったら，あまっている７枚をまだ配ることができるので，折り紙が７枚あまることはありえません。

つまり，子どもの人数は赤い折り紙のあまりである「４」や，青い折り紙のあまりである「７」より多い必要があります。(「７」もダメです。)

したがってＯＫなのは，24 の約数である 1，2，3，4，6，8，12，24 のうち，7 より大きい数である 8，12，24 です。

重要問題チェック $\boxed{4}$

たとえば，1から12までの中に，3の倍数は 12÷3＝4(個)あります。

たとえば，1から20までの中に，3の倍数は，20÷3＝6 あまり 2ですから，6個あります。

このように，1からだったら，3の倍数が何個あるかは，わり算をすることによって求めることができます。

ところがこの問題の場合は1からではなく，50から100までという，中途半端なところから始まっています。

$$\boxed{50,\ 51,\ 52,\ \cdots\cdots,\ 100}$$

このような問題の場合は，1から49までをつけ加えて，1から100までにします。

$$\overbrace{1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ 49,}^{\text{つけ加える}}\ \boxed{50,\ 51,\ 52,\ \cdots\cdots,\ 100}$$

$\boxed{\text{注意}}$　1から50までをつけ加えると，50がダブッてしまうのでダメです。

1から100までの中に，3の倍数は，100÷3＝33 あまり 1ですから，33個あります。

33個

$$\overbrace{1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ 49,}^{\text{つけ加える}}\ \boxed{50,\ 51,\ 52,\ \cdots\cdots,\ 100}$$

また，つけ加えた1から49までの中に，3の倍数は，49÷3＝16 あまり 1 ですから，16個あります。

33個

$$\overbrace{1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ 49,}^{\text{16個}}\ \boxed{50,\ 51,\ 52,\ \cdots\cdots,\ 100}$$

よって，50から100までの中に3の倍数は，33－16＝17(個)あります。

33個

$$\overbrace{1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ 49,}^{\text{16個}}\ \overset{\text{17個}}{\boxed{50,\ 51,\ 52,\ \cdots\cdots,\ 100}}$$

重要問題チェック 5

「連除法」で最小公倍数を求めます。

最小公倍数の場合は，２個でもわれる数があったらわります。

（最大公約数の場合は，すべてをわれる数でわります。）

(1)
$$\begin{array}{r|rr} 2 & 18 & 48 \\ \hline 3 & 9 & 24 \\ \hline & 3 & 8 \end{array} \rightarrow 144$$

(2)
$$\begin{array}{r|rrr} 7 & 28 & 42 & 63 \\ \hline 2 & 4 & 6 & 9 \\ \hline 3 & 2 & 3 & 9 \\ \hline & 2 & 1 & 3 \end{array} \rightarrow 252$$

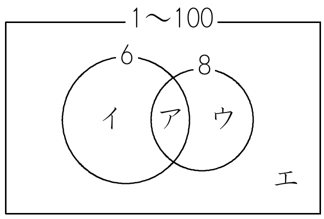
重要問題チェック $\boxed{6}$

(1)　６でも８でもわり切れる整数は，６の倍数でもあるし８の倍数でもあるのですから，６と８の公倍数です。

６と８の最小公倍数は 24 ですから,「６でも８でもわり切れる数」は, 24 の倍数です。

１から 100 までの中で，24 の倍数は何個あるかという問題になりましたから，100÷24＝４　あまり　４　により，答えは４個です。

(2)　右のようなベン図を書きましょう。



６でも８でもわり切れない整数は，エの部分です。

アは６でも８でもわり切れる整数ですから，(1)で求めた通り４個あります。

６の倍数は　100÷6＝16　あまり　４　により 16 個ありますから，イは　16－4＝12(個)です。

８の倍数は　100÷8＝12　あまり　４　により 12 個ありますから，ウは　12－4＝8(個)です。

よって「ア＋イ＋ウ」は，4＋12＋8＝24(個)です。

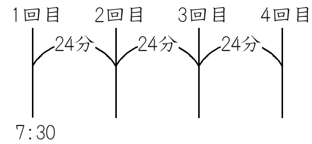
$\boxed{\text{注意}}$　６の倍数＋８の倍数－６と８の公倍数＝16＋12－4＝24(個)でもＯＫです。

１から 100 までに整数は 100 個ありますから，エは，100－24＝76(個)です。

重要問題チェック $\boxed{7}$

(1)　8と12の最小公倍数は24ですから，バスは24分おきに同時に出発します。

　右の図のように同時に出発するので，4回目に同時に出発するのは，7時30分の 24×3＝72(分)後です。



$\boxed{\text{注意}}$　24×4＝96(分)後にするミスが多いです。注意しましょう。

　よって，7時30分＋72分＝7時102分＝8時42分 です。

(2)　始発は7時30分で，正午とは12時のことですから，12時－7時30分＝4時間30分あります。

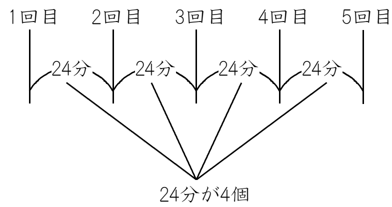
　1時間は60分ですから，4時間30分＝(60×4＋30)分＝270分です。

　バスは24分おきに同時に出発します。

　270分の中に24分は，270÷24＝11 あまり 6 ですから，11回入っています。

　しかし答えは11回ではありません。

　たとえば右の図のように24分が4回あったら，バスが同時に出発するのは5回あります。
　植木算ですね。



　同じようにして，24分が11回あったら，バスが同時に出発するのは，11＋1＝12(回)あります。

重要問題チェック $\boxed{8}$

大小比較の問題を解くテクニックはたくさんあります。たとえば，

・小数にして比較する。小数第3位ぐらいまで求めたら，大小比較はできます。
・通分(分母をそろえる)して比較する。分子が大きい方が，分数としても大きい。
・分子をそろえて比較する。分母が小さい方が，分数としては大きい。
・分母と分子の差をそろえて比較する。
・分母と分子の和をそろえて比較する。

この問題の場合は，小数にして比較するのがよいでしょう。

$\frac{3}{7} = 3 \div 7 = 0.428 \cdots$

$\frac{5}{12} = 5 \div 12 = 0.416 \cdots$

「0.428，0.416，0.42」のうち，最も小さいのは0.416，次は0.42，次は0.428ですから，答えは $\frac{5}{12}$，0.42，$\frac{3}{7}$ です。

重要問題チェック $\boxed{9}$

$2\frac{4}{15}=\frac{34}{15}$ と $4\frac{1}{21}=\frac{85}{21}$ を，ある分数にかけたところ，答えが整数になったそうです。

分数を $\frac{\triangle}{\bigcirc}$ とすると，$\frac{\triangle}{\bigcirc}\times\frac{34}{15}$ ＝整数，$\frac{\triangle}{\bigcirc}\times\frac{85}{21}$ ＝整数　となります。

$\frac{\triangle\times 34}{\bigcirc\times 15}$ ＝整数，$\frac{\triangle\times 85}{\bigcirc\times 21}$ ＝整数　となりますが，分数×分数が整数になるためには，たとえば $\frac{27}{8}\times\frac{32}{3}=\frac{\overset{9}{\cancel{27}}\times\overset{4}{\cancel{32}}}{\underset{1}{\cancel{8}}\times\underset{1}{\cancel{3}}}=\frac{36}{1}=36$ のように，約分されて，分母が1にならなければなりません。

そこで，まず△はどのような数にならなければいけないのか，考えてみます。

$\frac{\triangle\times 34}{\bigcirc\times 15}$ の△は分母の15と約分されて，$\frac{\overset{\text{何か}}{\cancel{\triangle}}\times 34}{\bigcirc\times\underset{1}{\cancel{15}}}$ となるためには，△は15の倍数にならなければなりません。

同じようにして，$\frac{\triangle\times 85}{\bigcirc\times 21}$ の△は分母の21と約分されて，$\frac{\overset{\text{何か}}{\cancel{\triangle}}\times 85}{\bigcirc\times\underset{1}{\cancel{21}}}$ となるためには，△は21の倍数にならなければなりません。

以上のことから，△は15の倍数でもあるし，21の倍数でもあるので，△は15と21の公倍数になります。

次に，○はどのような数にならなければいけないのか，考えてみます。

$\frac{\triangle\times 34}{\bigcirc\times 15}$ の○は分子の 34と約分されて，$\frac{\triangle\times\overset{\text{何か}}{\cancel{34}}}{\underset{1}{\cancel{\bigcirc}}\times 15}$ となるためには，○は 34 の約数にならなければなりません。

同じようにして，$\frac{\triangle\times 85}{\bigcirc\times 21}$ の○は分子の 85 と約分されて，$\frac{\triangle\times\overset{\text{何か}}{\cancel{85}}}{\underset{1}{\cancel{\bigcirc}}\times 21}$ となるためには，○は 85 の約数にならなければなりません。

（次のページへ）

以上のことから，◯は 34 の約数でもあるし，85 の約数でもあるので，◯は 34 と 85 の公約数になります。

ある分数$\frac{\triangle}{\bigcirc}$の，分子である△は 15と21 の公倍数で，◯は 34 と 85 の公約数であることがわかりました。

$$\frac{\triangle}{\bigcirc}=\frac{15と21の公倍数}{34と85の公約数}$$

ところで問題には，最も小さい分数を求めなさいと書いてありました。

分数を小さくするためには，分子をなるべく小さく（$\frac{4}{7}$より$\frac{1}{7}$の方が小さい），分母をなるべく数を大きく（$\frac{1}{3}$より$\frac{1}{10}$の方が小さい）する必要があります。

ですから，$\frac{\triangle}{\bigcirc}=\frac{\overbrace{15と21の公倍数}^{最小}}{\underbrace{34と85の公約数}_{最大}}$ということになり，答えは$\frac{105}{17}=6\frac{3}{17}$になります。

重要問題チェック $\boxed{10}$

(1) $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$ の分子を 24 にします。

$\frac{1}{2}=\frac{24}{48}$, $\frac{3}{5}=\frac{24}{40}$ ですから，$\frac{24}{48}$ より大きく $\frac{24}{40}$ より小さい分子が 24 の分数を求めることになります。

48 と 40 の間にある整数は，47，46，45，44，43，42，41 です。

この中で，既約分数(これ以上約分できない分数)のみが答えになります。

答えは，$\frac{24}{47}$, $\frac{24}{43}$, $\frac{24}{41}$ です。

(2) $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$ の分母を 52 にします。

$\frac{1}{2}=\frac{26}{52}$, $\frac{3}{5}=\frac{31.2}{52}$ ですから，$\frac{26}{52}$ より大きく $\frac{31.2}{52}$ より小さい分母が 52 の分数を求めることになります。

$\boxed{\text{注意}}$ $\frac{3}{5}$ を $\frac{31.2}{52}$ にするときは，分母も分子も $52\div5=10.4$(倍)しました。

26 と 31.2 の間にある整数は，27，28，29，30，31 です。

この中で，既約分数(これ以上約分できない分数)のみが答えになります。

答えは，$\frac{27}{52}$, $\frac{29}{52}$, $\frac{31}{52}$ です。

重要問題チェック $\boxed{11}$ (1)

3でわると2あまり，5でわると1あまるような最も小さい整数は，どんどん書いていくことで求めます。

3でわると2あまる数は，はじめが2で，そのあと3をどんどんプラスすることで求めることができます。

（ア） 3でわると2あまる → 2，5，8，11，14，…

5でわると1あまる数も，はじめが1で，そのあと5をどんどんプラスすることで求めることができます。

（イ） 5でわると1あまる → 1，6，11，16，21，…

(ア)と(イ)の両方に入っている数は11です。

よって，3でわると2あまり，5でわると1あまるような最も小さい整数は11であることがわかりました。

ところが(1)の問題は最も小さい整数ではなく，小さい方から5番目の整数を求める問題です。

5番目の整数までずっと書いていかなくても，求めることができます。

最も小さい整数は11です。このあと「3でわると2あまる」数は，3をどんどんプラスすることで求めることができ，「5でわると1あまる」数は，5をどんどんプラスすることで求めることができます。

よって，「3でわると2あまり，5でわると1あまる」数は，3ずつプラスでも5ずつプラスでもあてはまる，(3と5の最小公倍数である)15をプラスすることによって求めることができます。

最も小さい数は11で，このあと15をどんどんプラスすればよいのですから，11，26，41，…という，15ずつ増える等差数列になります。

等差数列のN番目は，「はじめ＋増える数×(N－1)」という公式で求めることができます。Nは，何番目かを表します。

よって5番目の整数は，11＋15×(5－1)＝11＋15×4＝11＋60＝71です。

重要問題チェック $\boxed{11}$ (2)

(1)で，「3でわると2あまり，5でわると1あまる」ような整数は，はじめが11で，15ずつ増える等差数列であることがわかりました。

(2)では，そのような整数のうち，3けたで最も大きい整数を求める問題です。

11に15を足していっても，なかなか3けたで最も大きい整数には到達しません。

そこで15を足すのではなく，一気に15の10倍である150を足していってはどうでしょう。

150を足していってもまだなかなか到達しないのなら，150の何倍かを足していくとすぐ到達することができます。

150の7倍だと1050なのでオーバーしてしまいますから，150の6倍である900をプラスすると，11＋900＝911になり，かなり「3けたで最も大きい整数」に近づきました。

あとは15ずつプラスしていって，911，926，941，956，971，986，1001，…となり，3けたで最も大きい整数は986であることがわかりました。

$\boxed{\text{別解}}$ 等差数列の公式である「はじめの数＋増える数×(N－1)＝N番目の数」を利用する解き方もあります。

はじめの数が11で，15ずつ増える等差数列ですから，N番目を「3けたで最も大きい数である999」にすると，

11＋15×(N－1)＝999

999－11＝987　　987÷15＝65.8　　65.8＋1＝66.8

よって，66.8番目の数が999になります。小数番目ではダメで，67番目にすると999を超えてしまいますから，66番目が3けたで最も大きい整数になります。

もう一度等差数列の公式を利用して，

11＋15×(66－1)＝11＋15×65＝11＋975＝986 です。

重要問題チェック $\boxed{12}$

$\boxed{11}$ と同じように，「最も小さい整数を書いていくことによって求め，そのあと６と14の最小公倍数ずつプラスしていくことで求める」解き方もＯＫですが，問題をよく見ると，「６でわると２あまる」は６−２は４になり，「14でわると10あまる」も，14−10は４になっています。このことを利用して解いていきます。

「６でわると２あまる」ことを，「アメが何個かあります。このアメを６人の子どもに同じ個数ずつ配ったところ，２個あまりました。」という文にしてもＯＫですね。
あまった２個を，６人に配ることはできません。しかし，あと 6−2＝4(個)よけいにあったら，あまりは 2+4＝6(個)になり，もう１個ずつよけいに配ることができます。
つまり，「６でわると２あまる」というのは，「あと４あれば，６でわり切れる」と言い換えるこができます。…(ア)

同じようにして，「14でわると10あまる」も，「アメが何個かあります。このアメを14人の子どもに同じ個数ずつ配ったところ，10個あまりました。」という文にして考えます。
あと 14−10＝4(個)よけいにあったら，あまりは 10+4＝14(個)になり，もう１個ずつよけいに配ることができます。
つまり，「14でわると10あまる」というのは，「あと４あれば，14でわり切れる」と言い換えるこができます。…(イ)

(ア)と(イ)から，「あと４あれば，６でわり切れる」し，「あと４あれば，14でわり切れる」ことがわかりました。
つまり，「あと４あれば，６でも14でもわり切れる」ことになります。

６でも14でもわり切れるというのは，６と14の最小公倍数である42の倍数ということです。

よって，「あと４あれば，６でも14でもわり切れる」は，「あと４あれば，42の倍数になる」ということです。

42の倍数のうち，900に最も近い整数を考えてみましょう。

900÷42＝21 あまり 18 ですから，900の中に42は21回入っています。

よって42の21倍である，42×21＝882，または，オーバーさせて 42×22＝924が，900に近い42の倍数です。

(次のページへ)

したがって，「あと 4 あれば 42 の倍数になる」は，「あと 4 あれば 882」または，「あと 4 あれば 924」です。

「あと 4 あれば 882」というのは，「4 増やせば 882 になる」ということですから，本当は，882－4＝878 です。

「あと 4 あれば 924」というのは，「4 増やせば 924 になる」ということですから，本当は，924－4＝920 です。

答えは 878 か 920 ですが，878 は 900 よりも 900－878＝22 小さく，920 は 900 よりも，920－900＝20 大きいです。

よって，より 900 に近いのは，920 です。

以上，整理すると，
右の表のようになります。

6でわると2あまる ＝ あと4あれば6でわり切れる

14でわると10あまる ＝ あと4あれば14でわり切れる

↓

あと4あれば6と14でわり切れる
＝
あと4あれば42でわり切れる
＝
あと4あれば882か924
＝
882－4＝878か，924－4＝920
↓
900に近いのは920

重要問題チェック 13

(1)　Aは3分ごとに製品を作るので，50分では，50÷3＝16あまり2ですから，16個作ることができます。

Bは4分ごとに製品を作るので，50分では，50÷4＝12あまり2ですから，12個作ることができます。

Aは16個，Bは12個作るのですから，全部で，16＋12＝28(個)の製品ができています。

(2)　Aは3分ごと，Bは4分ごとに製品を作ります。

そこで，3と4の最小公倍数である12分を1セットとして考えてみます。

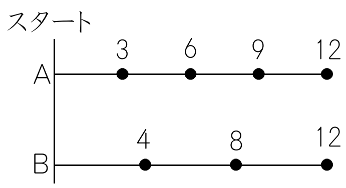
12分間で，Aは12÷3＝4(個)，Bは12÷4＝3(個)作るのですから，1セット＝12分あたり，4＋3＝7(個)の製品を作ることができます。

1セット＝12分では7個作ることができるのですから，もし2セット＝24分では，7×2＝14(個)作ることができます。
もし70個作るのなら，70÷7＝10(セット)ぶん，つまり 12×10＝120(分)かかります。

(2)の問題では，全部で200個作る必要があります。

1セットは7個ですから，200÷7＝28 あまり 4 なので，28セットと，あと4個作る必要があります。

1セットは12分なので，28セットでは，12×28＝336(分)です。…(ア)



Aは3分ごと，Bは4分ごとに製品を作るので，3分のときに1個目，4分のときに2個目，6分のときに3個目，8分のとに4個目を作ります。

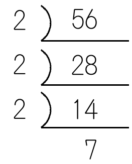
よって，あまりの4個を作るには8分かかることがわかりました。…(イ)

(ア)，(イ)から，200個を作るのに，336＋8＝344(分)かかることになります。

1時間は60分で，344÷60＝5あまり44ですから，答えは5時間44分後です。

重要問題チェック $\boxed{14}$ (1)

56を素因数分解すると，2×2×2×7になります。

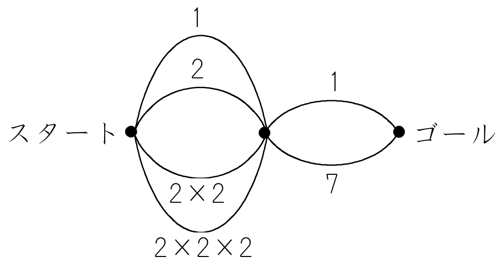


「2×2×2×7」の中には，2が3個あります。
2が3個あるとき，「2の道」は，（3個に1個プラスして）4本あるとします。
その4本とは，「1の道」，「2の道」，「2×2の道」，「2×2×2の道」の4本のことです。

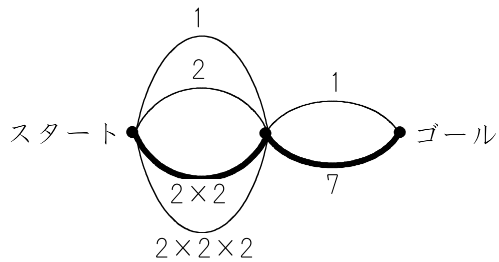
「2×2×2×7」の中には，7が1個あります。
7が1個あるとき，「7の道」は，（1個に1個プラスして）2(本)あるとします。
その2本とは，「1の道」，「7の道」の2本のことです。

このように，素因数分解の中にある素数がN個あったら，「1の道」の1本をプラスして，道は（N＋1）本あることにするのです。

「2×2×2×7」の場合は，右の図のようになります。



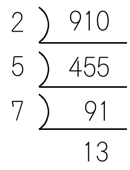
もし，右の図の太線のように通ったとしたら，2×2×7＝28 という約数をゲットした，ということになります。



このように考えると，約数が何個あるかというのは，スタートからゴールまでの道の通り方が何通りあるかという問題と同じだということがわかりました。

スタートから，4本，2本の道がありますから，約数の個数は，4×2＝8(個)になります。

重要問題チェック $\boxed{14}$ (2)

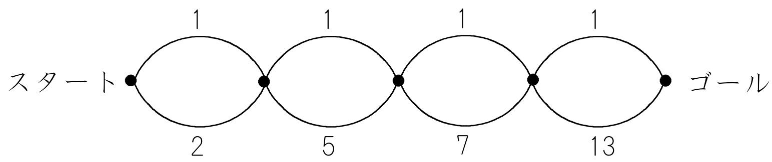


910を素因数分解すると，2×5×7×13になります。

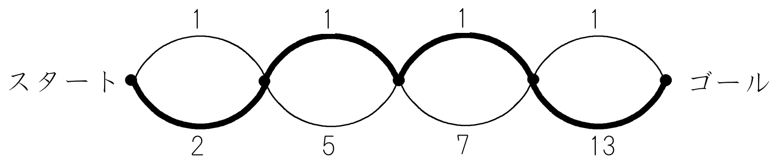
「2×5×7×13」の中には，2が1個あります。
2が1個あるとき，「2の道」は，（1個に1個プラスして）2本あるとします。
その2本とは，「1の道」，「2の道」の2本のことです。

同じようにして，5も1個ですから，「1の道」，「5の道」の2本あります。
7も1個ですから，「1の道」，「7の道」の2本あります。
13も1個ですから，「1の道」，「13の道」の2本あります。

「2×5×7×13」を，道の通り方で表すと，右の図のようになります。



たとえば，右の図の太線のように通ったら，2×1×1×13＝26という約数をゲットしたことになります。



このように考えると，約数が何個あるかというのは，スタートからゴールまでの道の通り方が何通りあるかという問題と同じだということがわかりました。

スタートから，2本，2本，2本，2本の道がありますから，約数の個数は，2×2×2×2＝16(個)になります。

重要問題チェック $\boxed{15}$

約数が2個 … 素数
約数が3個 … 素数の平方数
約数が4個 … 素数の立方数か， 素数×別素数
約数が奇数個 … 平方数

(1)　右の表をおぼえておきましょう。

たとえば5は素数ですが，5の平方数である25の約数は，1，5，25の3個です。

このように，素数の平方数は約数が3個あります。

素数を小さい方から5個書くと，2，3，5，7，11です。

$\boxed{\text{注意}}$　1は素数ではないことに注意しましょう。

よって小さい方から5番目の素数は11ですから，11の平方数である，11×11＝121が答えです。

(2)　約数の個数が4個である整数は，「素数の立方数」か，「素数×別素数」です。

2，3，5，7，……という素数の立方数は，2×2×2＝8，3×3×3＝27，…となり，1以上25以下では，8のみの1個です。

「素数×別素数」は，「2×別素数」では，2×3＝6，2×5＝10，2×7＝14，2×11＝22があてはまります。2×13＝26は，25以下という条件にあてはまりません。
「3×別素数」では，3×5＝15，3×7＝21があてはまります。3×11＝33はダメです。
「5×別素数」では，5×7＝35はダメですから，あてはまる数はありません。

よって「素数×別素数」にあてはまるのは，6，10，14，22，15，21の6個です。

「素数の立方数」は1個，「素数×別素数」は6個ですから，約数の個数が4個である整数は，1＋6＝7(個)あります。

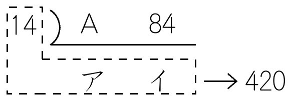
(3)　約数の個数が奇数個である整数は，「平方数」です。

1×1＝1，2×2＝4，3×3＝9，…，14×14＝196までの14個あります。

重要問題チェック $\boxed{16}$

(1)　このような問題は，連除法のようすを書くことによって求めることができます。

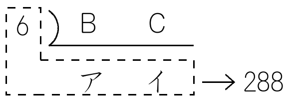
Aと84の最大公約数が14，最小公倍数が420ですから，右の図のようになります。



イは 84÷14＝6で，14×ア×イ＝420ですから，ア＝420÷14÷イ＝420÷14÷6＝5です。

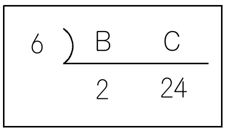
A÷14＝アですから，A＝ア×14＝5×14＝70です。

(2)　連除法のようすは右の図のようになり，6×ア×イ＝288ですから，ア×イ＝288÷6＝48です。

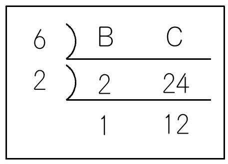


「B＜C」ですから「ア＜イ」なので，(ア，イ)の組み合わせは，(1，48)，(2，24)，(3，16)，(4，12)，(6，8)が考えられます。

しかし，(ア，イ)＝(2，24)はダメです。なぜなら，(ア，イ)＝(2，24)のとき，



となりますが，2も24も2でわれるので



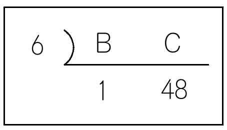
となり，

最大公約数が6ではなく，6×2＝12になってしまうからです。

同じ理由で，(4，12)，(6，8)も，2でわれるからダメです。

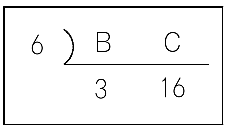
よってOKなのは(ア，イ)＝(1，48)，(3，16)のみです。

(ア，イ)＝(1，48)のとき，



となり，B÷6＝1，C÷6＝48ですから，B＝1×6＝6，C＝48×6＝288です。

(ア，イ)＝(3，16)のとき，



となり，B÷6＝3，C÷6＝16ですから，B＝3×6＝18，C＝16×6＝96です。

よって，B，Cの組として考えられるのは，(B，C)＝(6，288)，(18，96)です。

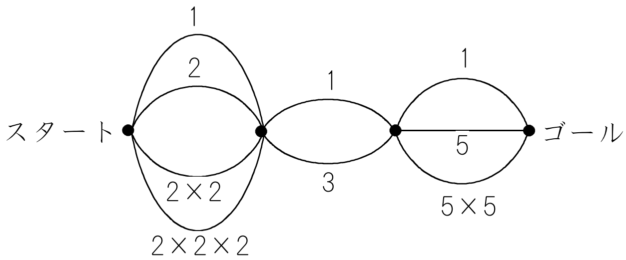
重要問題チェック $\boxed{17}$ (1)

約数の個数を求めるときと同様に，まず素因数分解をしましょう。

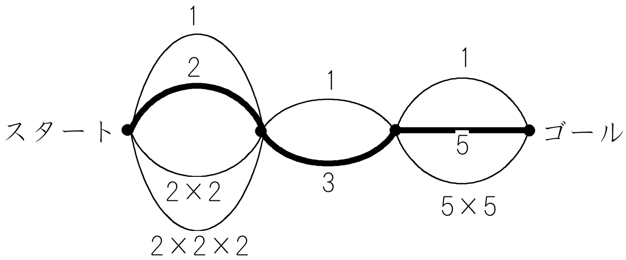
600 を素因数分解すると，2×2×2×3×5×5です。

２は３個あるので「２の道」は４本，３は１個なので「３の道」は２本，５は２個あるので「５の道」は３本です。

よって，右の図のようになります。



もし，右の図の太線のように進んだら，2×3×5＝ 60 という約数になります。

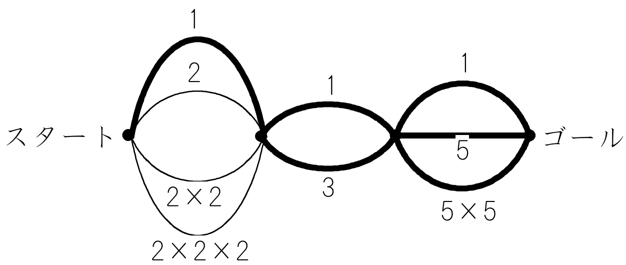


(1)は，奇数の約数が何個あるかという問題ですから，「60」は偶数なのでダメです。

なぜ 60 が偶数になってしまったかというと，「2」の道を通ったからです。

同じようにして，「2×２の道」,「2×2×２の道」を通っても，約数は偶数になります。

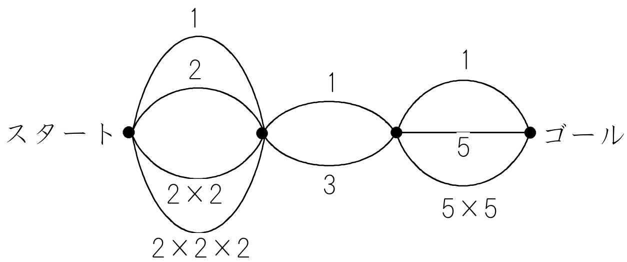
約数が奇数になるためには，右の図の太線の道を通ってゴールしなければなりません。



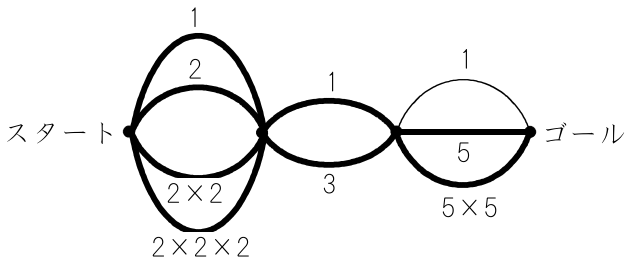
スタートからゴールまでの通り方は，1×2×3＝６(通り)あるので，奇数の約数も６個あることがわかりました。

重要問題チェック $\boxed{17}$ (2)

(1)で，600 を素因数分解することにより，右のような道の通り方になることがわかりました。



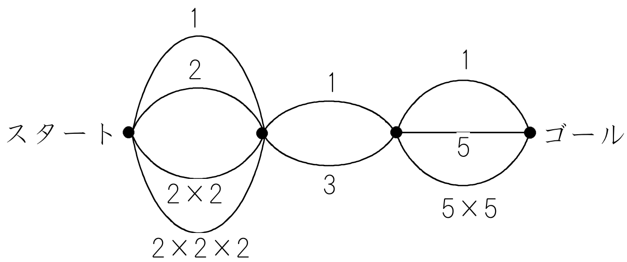
約数が５の倍数になるためには，「５の道」か「５×５の道」を通らなければならないので，通ることのできる道は，右の図の太線の道です。



よって，道の通り方は 4×2×2＝16(通り)，
つまり，600 の約数のうち，5の倍数は 16 個あることがわかりました。

重要問題チェック $\boxed{17}$ (3)

(1)で，600 を素因数分解することにより，右のような道の通り方になることがわかりました。

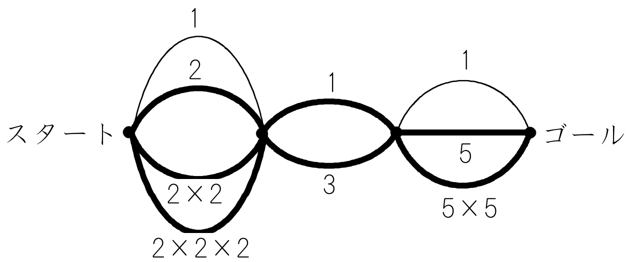


(3)は，約数が 10 の倍数であるのは何個あるか，という問題です。

「10」は，2と5の最小公倍数ですから，「2の倍数で，しかも5の倍数でもある」ような数は，10 の倍数です。

よって，「2の道」か「2×2の道」か「2×2×2の道」を通り，しかも，「5の道」か「5×5の道」を通れば，10 の倍数になります。

右の図の太線を通ればよいので，通り方は 3×2×2＝12(通り)，つまり，10 の倍数は 12 個あることがわかりました。



重要問題チェック $\boxed{18}$ (1)

分子が１になる分数は，どんな分数でしょう。

たとえば，$\frac{8}{88}$ は約分されて $\frac{1}{11}$ となり，分子が１になります。

$\frac{22}{88}$ も，約分されて $\frac{1}{4}$ となり，分子が１になります。

分子が１になる分数は，「分母÷分子」がわり切れるような分数です。

つまり，分子が分母の約数になっているような分数です。

88 の約数は 1，2，4，8，11，22，44，88 の８個ありますから，このような分数は8個あるはずですが，答えは８個ではありません。

その理由は２つ。

まず，$\frac{88}{88}$ はもとからありません。問題を見ると，$\frac{87}{88}$ までになっています。

それから，$\frac{1}{88}$ もダメです。なぜなら，問題文には「既約分数ではなく」と書いてありましたが，$\frac{1}{88}$ は既約分数なので，数えてはいけません。

よって，８個のうち，数えてはいけない分数が２個あったので，答えは ８－２＝ 6(個)です。

重要問題チェック $\boxed{18}$ (2)

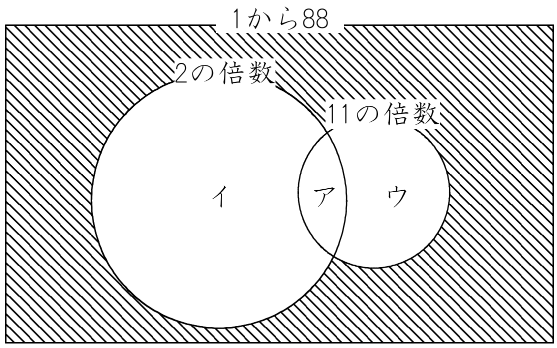
問題には，分数は $\frac{87}{88}$ まで並んでいますが，$\frac{88}{88}$ まで並べても答えは変わらないことに注意しましょう。

なぜなら，$\frac{88}{88}$ はどうせ既約分数ではないので，既約分数の個数に影響しないからです。

88 を素因数分解すると 2×2×2×11 で，その中には 2 と 11 という素因数がふくまれています。

よって，分子が 2 の倍数だったり，11 の倍数だったりすると約分されてしまいます。

よって既約分数の分子は，2 の倍数でもなく，11 の倍数でもないような数です。



右のベン図のしゃ線をつけた部分の個数を求めることになります。

アは 2 と 11 の公倍数なので，22 の倍数になり，88÷22＝ 4(個)です。

イは 88÷2－ア＝ 44－4＝ 40(個)です。

ウは 88÷11－ア＝ 8－4＝ 4(個)です。

よってしゃ線部分の個数は，88－(ア＋イ＋ウ)＝ 88－(4＋40＋4)＝ 40(個)です。

参考　$88\times(1-\frac{1}{2})\times(1-\frac{1}{11})=40$(個)という，ナゾの公式があります。

重要問題チェック $\boxed{19}$ (1)

100までだと大変なので，20までにすると次のような式になります。

$$A=1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9\times10\times11\times12\times13\times14\times15\times16\times17\times18\times19\times20$$

1から20までの数は，2で20÷2＝10(回)わり切れます。

$$A=1\times\overset{1}{\cancel{2}}\times3\times\overset{2}{\cancel{4}}\times5\times\overset{3}{\cancel{6}}\times7\times\overset{4}{\cancel{8}}\times9\times\overset{5}{\cancel{10}}\times11\times\overset{6}{\cancel{12}}\times13\times\overset{7}{\cancel{14}}\times15\times\overset{8}{\cancel{16}}\times17\times\overset{9}{\cancel{18}}\times19\times\overset{10}{\cancel{20}}$$

新しく，1から10までの数が現れました。

10÷2＝５ですから，1から10までの数は２で５回わり切れます。

$$A=1\times\overset{1}{\cancel{2}}\times3\times\overset{\overset{1}{\cancel{2}}}{\cancel{4}}\times5\times\overset{3}{\cancel{6}}\times7\times\overset{\overset{2}{\cancel{4}}}{\cancel{8}}\times9\times\overset{5}{\cancel{10}}\times11\times\overset{\overset{3}{\cancel{6}}}{\cancel{12}}\times13\times\overset{7}{\cancel{14}}\times15\times\overset{\overset{4}{\cancel{8}}}{\cancel{16}}\times17\times\overset{9}{\cancel{18}}\times19\times\overset{\overset{5}{\cancel{10}}}{\cancel{20}}$$

新しく，1から５までの数が現れました。

5÷2＝２ あまり １ですから，1から５までの数は２で２回わり切れます。

$$A=1\times\overset{1}{\cancel{2}}\times3\times\overset{\overset{1}{\cancel{2}}}{\cancel{4}}\times5\times\overset{3}{\cancel{6}}\times7\times\overset{\overset{\overset{1}{\cancel{2}}}{\cancel{4}}}{\cancel{8}}\times9\times\overset{5}{\cancel{10}}\times11\times\overset{\overset{3}{\cancel{6}}}{\cancel{12}}\times13\times\overset{7}{\cancel{14}}\times15\times\overset{\overset{\overset{2}{\cancel{4}}}{\cancel{8}}}{\cancel{16}}\times17\times\overset{9}{\cancel{18}}\times19\times\overset{\overset{5}{\cancel{10}}}{\cancel{20}}$$

新しく，1から２までの数が現れました。

2÷2＝１ ですから，1から２までの数は２で１回わり切れます。

$$A=1\times\overset{1}{\cancel{2}}\times3\times\overset{\overset{1}{\cancel{2}}}{\cancel{4}}\times5\times\overset{3}{\cancel{6}}\times7\times\overset{\overset{\overset{1}{\cancel{2}}}{\cancel{4}}}{\cancel{8}}\times9\times\overset{5}{\cancel{10}}\times11\times\overset{\overset{3}{\cancel{6}}}{\cancel{12}}\times13\times\overset{7}{\cancel{14}}\times15\times\overset{\overset{\overset{\overset{1}{\cancel{2}}}{\cancel{4}}}{\cancel{8}}}{\cancel{16}}\times17\times\overset{9}{\cancel{18}}\times19\times\overset{\overset{5}{\cancel{10}}}{\cancel{20}}$$

整理すると，　20÷2＝10
　　　　　　　10÷2＝5
　　　　　　　 5÷2＝2あまり1
　　　　　　　 2÷2＝1

(次のページへ)

よって，10回，5回，2回，1回われるので，全部で 10＋5＋2＋1＝18(回)わり切れます。

同じようにして，A＝1×2×3×4×……×99×100 の場合も，

100÷2＝50
50÷2＝25
25÷2＝12 あまり 1
12÷2＝6
6÷2＝3
3÷2＝1 あまり 1

よって，50＋25＋12＋6＋3＋1＝97(回)わり切れます。

わり切れなくなるのは，97＋1＝98(回目)です。

注意　せっかく97まで求めたのに，答えを97回目にしてしまうミスが多いです。注意！

重要問題チェック $\boxed{19}$ (2)

慣れるまでは意味をよく考えて解き，慣れたら機械的に解きましょう。

まず，次のような超簡単な問題から解説します。

問題

10570000000 は，一の位から連続して「０」が何個ならびますか。

単純に一の位から並んでいる０の数をかぞえればよいので，答えは７個になります。
では，次の問題はどうでしょう。

問題

10570000000 は，10 で何回わり切れますか。

10 で１回ずつわっていくと，右はしの０が１個ずつなくなっていくので，７回われば 1057 となり，それ以上わり切れなくなります。よって，答えは７回です。

つまり，「一の位から連続して０が何個ならびますか。」という問題は，
「10 で何回わり切れますか。」という問題と，同じことになります。

さて，「10 でわる」というのは，10＝２×５ですから，「２でわって，さらに５でわる。」ことと同じです。

たとえば，3628800 という数が，２で８回わり切れて，５で２回わり切れることがわかっているとします。
次のようなイメージです。

3628800
- ２で　…　○○○○○○○○　（８回）
- ５で　…　○○　（２回）

それでは，3628800 という数は，「２でわって，さらに５でわる」ということを，何回できるでしょうか。

実は，２回しかできません。
まず１回目，２でわって５でわると，次のようになります。

3628800
- ２で　…　×○○○○○○○　（あと７回）
- ５で　…　×○　（あと１回）

もう一度，２でわって５でわると，次のようになります。

3628800
- ２で　…　××○○○○○○　（あと６回）
- ５で　…　××　（あと０回）

（次のページへ）

つまり，いくら２でわることが多く残っていたとしても，もう５でわることは不可能なので，「２でわって，さらに５でわる」ことは，２回しかできません。

ようするに，「２でわって，さらに５でわる」ことは，「２でわり切れる回数」と，「５でわり切れる回数」のうち，少ない回数の方しかできないことになります。

では，Ａ＝1×2×3×4×……×99×100 について，考えてみましょう。

Ａが２で何回われるかは，(1)ですでに求めた通り，97 回です。

次に，Ａが，5で何回われるかを，求めてみましょう。

100÷5＝20 20÷5＝ 4

合計，20＋4＝24(回)，5でわることができます。

結局，Ａは２で 97 回，５で 24 回，わることができました。
「２でわって，さらに５でわる」ことは，少ない回数の方しかできないので，24 回しかできません。

よってＡは，一の位から連続して「0」が 24 個ならんでいることがわかりました。

ところで，答えを求めるときに，「２で何回われるか」と，「５で何回われるか」の，両方を計算して，少ない方である「５で何回われるか」の回数の方を答えにしました。
しかし，この問題のような，「1×2×…×Ｎ」の０がならぶ個数を求める問題の場合は，いつも必ず「２でわれる回数」よりも「５でわれる回数」の方が少ないので，「２でわれる回数」を求めることはしなくてＯＫです。

この問題の解き方を整理すると，右の図のようになります。

０が何個ならぶか ‖ 10 で何回われるか ‖ ２と５で何回われるか ‖ ５で何回われるか

ステップアップ演習 $\boxed{1}$ (1)

Ａ×Ｂ＝90，Ａ×Ｃ＝126，Ａ×Ｄ＝189 の３つの式には，すべてＡがふくまれています。

そこで，Ａについて考えてみましょう。

Ａ×Ｂ＝90 ですから，Ａは 90 でわり切れます。つまり，Ａは 90 の約数です。

同じようにして，Ａ×Ｃ＝126 ですから，Ａは 126 の約数であり，Ａ×Ｄ＝189 ですから，Ａは 189 の約数です。

よって，Ａは 90 と 126 と 189 の公約数になります。

90 と 126 と 189 の最大公約数は９ですから，Ａは９の約数です。

９の約数は，1，3，9 ですから，Ａは 1，3，9 のいずれかです。

あとは，Ａ×Ｂ＝90，Ａ×Ｃ＝126，Ａ×Ｄ＝189 の３つの式にＡ＝1，3，9 をあてはめて，Ｂ，Ｃ，Ｄを求めればよいことになります。

（Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄ）＝(1，90，126，189)，(3，30，42，63)，(9，10，14，21) が答えです。

ステップアップ演習$\boxed{1}$(2)

たとえば，1から100までの整数の中に，5の倍数は 100÷5＝20(個)あります。

同じようにして，1から100までの整数の中に，Ｅの倍数が7個あるのですから，100÷Ｅ が7になるはずです。

100÷7＝14 あまり 2 ですから，Ｅは14あたりの数であることがわかりました。

Ｅが12なら，100÷12＝8 あまり 4 になり，8個なのでダメです。

Ｅが13なら，100÷13＝7 あまり 9 になり，7個なのでＯＫです。

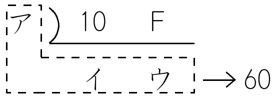
Ｅが14なら，100÷14＝7 あまり 2 になり，7個なのでＯＫです。

Ｅが15なら，100÷15＝6 あまり 10 になり，6個なのでダメです。

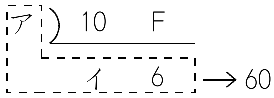
よって7個になっているのは，13，14です。

ステップアップ演習 $\boxed{1}$ (3)

右の連除法において，10÷ア＝イですから，ア×イ＝10 です。

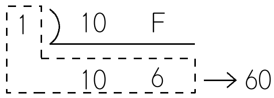


ア×イ×ウ＝60 で，ア×イ＝10 ですから，ウ＝60÷10＝6 です。

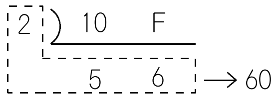


ア×イ＝10 となる(ア，イ)は，(1，10)，(2，5)，(5，2)，(10，1)のみです。

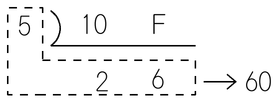
(ア，イ)＝(1，10)のとき，10 と 6 はまだ 2 でわり切れるのでダメです。



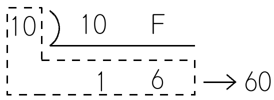
(ア，イ)＝(2，5)のとき，F÷2＝6 なので，F＝6×2＝12 です。



(ア，イ)＝(5，2)のとき，2 と 6 はまだ 2 でわり切れるのでダメです。



(ア，イ)＝(10，1)のとき，F÷10＝6 なので，F＝6×10＝60 です。



よって，F として考えられるのは，12 と 60 です。

ステップアップ演習$\boxed{1}$(4)

ミスしやすい問題です。

Ｇ，30，45 の最大公約数が 15 ですから，15 はＧの約数です。逆に言うと，Ｇは 15 の倍数です。

また，Ｇ，30，45 の最小公倍数が 450 ですから，450 はＧの倍数です。逆に言うと，Ｇは 450 の約数です。

Ｇは，15 の倍数であり，450 の約数であることがわかりました。

450 の約数をすべて書くと，

1，2，3，5，6，9，10，15，18，25，30，45，50，75，90，150，225，450

です。この中で，15 の倍数になっているのは，15，30，45，75，90，150，225，450 です。これらが，Ｇの候補です。

Ｇが 15，30，45，75，90，150，225，450 のいずれのときも，Ｇと 30 と 45 の最大公約数は 15 になりＯＫです。

あとは，最小公倍数が 450 になるかどうかを確かめていきます。

Ｇ＝15 のとき，Ｇ，30，45 の最小公倍数は 90 なのでダメです。
Ｇ＝30 のとき，Ｇ，30，45 の最小公倍数は 90 なのでダメです。
Ｇ＝45 のとき，Ｇ，30，45 の最小公倍数は 90 なのでダメです。
Ｇ＝75 のとき，Ｇ，30，45 の最小公倍数は 450 なのでＯＫです。
Ｇ＝90 のとき，Ｇ，30，45 の最小公倍数は 90 なのでダメです。
Ｇ＝150 のとき，Ｇ，30，45 の最小公倍数は 450 なのでＯＫです。
Ｇ＝225 のとき，Ｇ，30，45 の最小公倍数は 450 なのでＯＫです。
Ｇ＝450 のとき，Ｇ，30，45 の最小公倍数は 450 なのでＯＫです。

よって，Ｇとして考えられる整数は，75，150，225，450 になります。

ステップアップ演習 $\boxed{1}$ (5)

Ｐ君がふむのは，２段目，４段目，……という，２の倍数の段です。

Ｑ君がふむのは，３段目，６段目，……という，３の倍数の段です。

そこで，２と３の最小公倍数である６段までについて考えます。

６段のうち，Ｐ君がふむのは２段目，４段目，６段目で，Ｑ君がふむのは，３段目，６段目ですから，２人ともふまないのは，１段目と５段目の２段あります。

Ｐ君もＱ君もふまない段を書いていくと，右の図のようになります。何段までのようすかをカッコをつけて書いておくわかりやすくなります。

1， 5，(6)
7，11，(12)
13，17，(18)
19，23，(24)
……………
……………

求めたいのは，２人ともふまない段のうち，20 番目の段です。

１セットあたり２段ずつふまない段があるので，20 番目のふまない段は，20÷2＝ 10(セット)目にあります。

１セット目のカッコの中は6，２セット目のカッコの中は 12 のように，６の倍数がカッコの中に書いてあるので，10 セット目のカッコの中は，6×10＝ 60 です。

また，たとえば４セット目のカッコの中は 24 で，そのすぐ左には 23 が書いてあるように，カッコの中の数より１小さい数が，そのすぐ左に書いてあります。

1， 5，(6)
7，11，(12)
13，17，(18)
19，23，(24)
……………
……………
……………
……………
……………
55，59，(60) ← 10セット目

10 セット目のカッコの中は 60 でしたから，そのすぐ左は１小さい 59 になるので，２人ともふまない段のうち，20 番目の数は 59 段目であることがわかりました。

ステップアップ演習 2 (1)

リンゴは 64 個ありました。子どもたちに配ったら，4 個あまりました。

子どもたちに配ったりんごの個数は，64－4＝ 60(個)です。

子どもの人数は，60 個をぴったり配ることのできるような人数ですから，60 の約数です。

ナシは 88 個ありました。子どもたちに配ったら，8 個あまりました。

よって子どもの人数は，88－8＝ 80 の約数です。

ミカンは 124 個ありました。子どもたちに配ったら，4 個あまりました。

よって子どもの人数は，124－4＝ 120 の約数です。

子どもの人数は，60 の約数でもあり，80 の約数でもあり，120 の約数でもあるので，60 と 80 と 120 の公約数です。

60 と 80 と 120 の最大公約数は 20 ですから，子どもの人数は 20 の約数です。

20 の約数は，1，2，4，5，10，20 です。

しかし，これらがすべて子どもの人数にあてはまるわけではありません。なぜなら，リンゴは 4 個，ナシは 8 個，ミカンは 4 個あまっているからです。

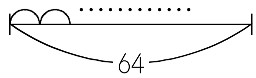
もし子どもの人数が 2 人だったとしたら，リンゴは 4 個あまるわけがありません。あまった 4 個を，2 人に配ることができるからです。

子どもの人数は，リンゴ，ナシ，ミカンのあまった数である，4，8，4 よりも多い人数です。

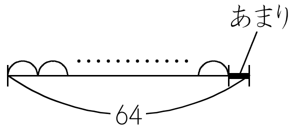
よって子どもの人数として考えられるのは，10 人，20 人です。

ステップアップ演習 $\boxed{2}$ (2)

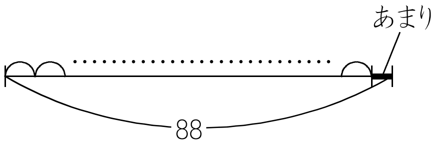
リンゴ 64 個を子どもに何個かずつ配っていくと，



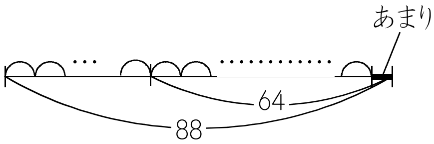
右の図のように，何個かあまります。



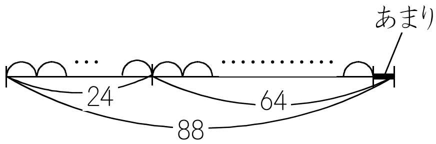
ナシ 88 個も同じように子どもに何個かずつ配っていくと，リンゴと同じ個数だけあまります。



ということは，64 個の部分は，リンゴとまったく同じ図になっているので，

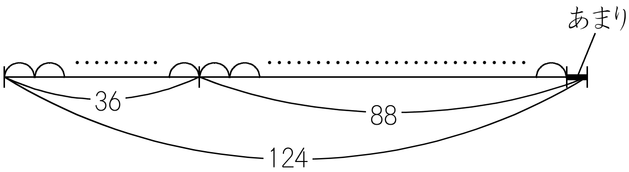


88－64＝ 24(個)の部分は，あまりなくぴったりわり切れることになります。



よって子どもの人数は，24 の約数です。

ミカン 124 個も同じように子どもに何個かずつ配っていくと，リンゴやナシと同じ個数だけあまります。



ということは，88 個の部分は，ナシとまったく同じ図になっているので，124－88＝ 36(個)の部分は，あまりなくぴったりわり切れることになります。

よって子どもの人数は，36 の約数です。

子どもの人数は，24 の約数でもあるし，36の約数でもあることがわかりました。

したがって，子どもの人数は，24 と 36 の公約数です。

24 と 36 の最大公約数は 12 ですから，子どもの人数は 12 の約数です。

(次のページへ)

12の約数は，1，2，3，4，6，12です。

しかし，これらすべてが答えになるわけではありません。

なぜなら，問題には「どれも１個以上あまり」と書いてあったからです。

たとえば子どもが２人の場合，64個，88個，124個を配ると，どれもわり切れてしまいます。このように，あまりが出ないでわり切れてしまう人数はダメなのです。

1，2，3，4，6，12のうち，64，88，124をわってもわり切れない数は，3，6，12のみです。

よって子どもの人数として考えられるのは，3人，6人，12人であることがわかりました。

以上，解き方を整理すると，

> 88－64＝24と，124－88＝36の公約数を求める。
>
> 公約数のうち，64，88，124をわってもわり切れない数のみが正解となる。

ステップアップ演習 $\boxed{3}$ (1)

ＡＢを２等分する点とは，ＡＢの$\frac{1}{2}$のところに書いた点のことです。

ＡＢを３等分する点とは，ＡＢの$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$のところに書いた点のことです。

ＡＢを４等分する点とは，ＡＢの$\frac{1}{4}$，$\frac{2}{4}$，$\frac{3}{4}$のところにかいた点のことですが，$\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ですから，$\frac{2}{4}$のところの点は，すでに２等分したときに書いてあります。

つまり，約分できる分数のときは，すでに書いてあるということです。

同じように考えると，２等分で１個，３等分で２個，…，６等分で５個の，合わせて $1+2+3+4+5=15$(個)の点のうち，約分できる$\frac{2}{4}$，$\frac{2}{6}$，$\frac{3}{6}$，$\frac{4}{6}$の４個の点の場合はすでに書かれているので，全部で $15-4=11$(個)の点が書かれていることになります。

ステップアップ演習 $\boxed{3}$ (2)

(1)と同じようにして，$\dfrac{1}{16}$ から $\dfrac{15}{16}$ の 15 個の分数のうち，約分できない分数(既約分数)のみが，それまで書かれた点と重ならない点になります。

16を素因数分解すると 2×2×2×2 なので，分子が 2 の倍数のとき約分できてしまいます。

約分できる分数は，15÷2＝7 あまり 1 により，7 個あります。

よって，約分できない分数(既約分数)は，15－7＝8(個)です。

ステップアップ演習 $\boxed{3}$ (3)

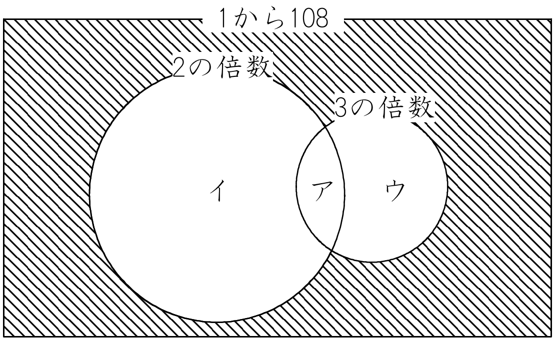
(1)，(2)と同じようにして，$\dfrac{1}{108}$ から $\dfrac{107}{108}$ までの 107 個の分数のうち，既約分数が何個あるかという問題になります。重要問題チェック $\boxed{18}$ (2)で，同じような問題を解いています。

問題を，$\dfrac{1}{108}$ から $\dfrac{108}{108}$ までの 108 個の分数のうち，既約分数が何個あるかという問題に変更してもＯＫです。なぜなら，$\dfrac{108}{108}$ はどうせ既約分数ではないので，既約分数の個数に影響しないからです。解くための計算は非常に楽になります。

108 を素因数分解すると 2×2×3×3×3 で，その中には 2 と 3 という素因数がふくまれています。

よって，分子が 2 の倍数だったり，3 の倍数だったりすると約分されてしまいます。

よって既約分数の分子は，2 の倍数でもなく，3 の倍数でもないような数です。



右のベン図のしゃ線をつけた部分の個数を求めることになります。

アは 2 と 3 の公倍数なので，6 の倍数になり，108÷6＝ 18 (個)です。

イは 108÷2－ア＝ 54－18＝ 36 (個)です。

ウは 108÷3－ア＝ 36－18＝ 18 (個)です。

よってしゃ線部分の個数は，108－(ア＋イ＋ウ)＝ 108－(18＋36＋18)＝ 36 (個)です。

$\boxed{参考}$ $108\times\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\times\left(1-\dfrac{1}{3}\right)=36$ (個)という，ナゾの公式があります。

ステップアップ演習 $\boxed{4}$

たとえば，ア，イが整数で，ア＞イとなっていて，「10＝ア＋イ」だとすると，アはどんな数でしょう。

もしア＝イなら，ア＝10÷2＝５ですから，アは５より大きい数，つまり，6，7，8，9です。

この問題では，Ａ＜Ｂとなっているので，$\frac{1}{A} > \frac{1}{B}$ で，$\frac{5}{24} = \frac{1}{A} + \frac{1}{B}$ です。

同じように考えると，もし $\frac{1}{A} = \frac{1}{B}$ なら，$\frac{1}{A} = \frac{5}{24} \div 2 = \frac{5}{48}$ ですから，$\frac{1}{A}$ は $\frac{5}{48}$ より大きい分数です。

$\frac{5}{48}$ の分子を１にするために，分母も分子も５でわると，$\frac{5}{48} = \frac{1}{9.6}$ となります。

よって $\frac{1}{A}$ は $\frac{1}{9.6}$ より大きい分数なので，(分数として大きくするためには分母を小さくする必要があるため)Ａは９以下の数です。

Ａ＝９とすると，$\frac{5}{24} = \frac{1}{B} + \frac{1}{9}$ ですから，$\frac{1}{B} = \frac{5}{24} - \frac{1}{9} = \frac{7}{72}$ となり，Ｂは整数にならないのでダメです。

Ａ＝８とすると，$\frac{5}{24} = \frac{1}{B} + \frac{1}{8}$ ですから，$\frac{1}{B} = \frac{5}{24} - \frac{1}{8} = \frac{1}{12}$ となり，Ｂ＝12です。

Ａ＝７とすると，$\frac{5}{24} = \frac{1}{B} + \frac{1}{7}$ ですから，$\frac{1}{B} = \frac{5}{24} - \frac{1}{7} = \frac{11}{168}$ となり，Ｂは整数にならないのでダメです。

Ａ＝６とすると，$\frac{5}{24} = \frac{1}{B} + \frac{1}{6}$ ですから，$\frac{1}{B} = \frac{5}{24} - \frac{1}{6} = \frac{1}{24}$ となり，Ｂ＝24です。

Ａ＝５とすると，$\frac{5}{24} = \frac{1}{B} + \frac{1}{5}$ ですから，$\frac{1}{B} = \frac{5}{24} - \frac{1}{5} = \frac{1}{120}$ となり，Ｂ＝120です。

Ａ＝４とすると，$\frac{5}{24} = \frac{1}{B} + \frac{1}{4}$ ですから，$\frac{1}{B} = \frac{5}{24} - \frac{1}{4}$ は引けないのでダメです。

よって，(Ａ，Ｂ)＝(8，12)，(6，24)，(5，120)が正解です。

ステップアップ演習 $\boxed{5}$

(1)　「８□74」を９でわると６あまるので，６を引いた数である「８□68」は，９でわり切れます。

９の倍数の見つけ方は，「各位の和が９の倍数」です。

「８□68」の，□以外の和は，８＋６＋８＝ 22 です。
９の倍数にするためには，５を足して 22＋5＝ 27 にすればよいので，□には５があてはまります。

(2)　「２８９１□５」を８でわると３あまるので，３を引いた数である「２８９１□２」が，８でわり切れます。

８の倍数の見つけ方は，「下３ケタが８の倍数」です。

「２８９１□２」の下３ケタは「１□２」です。これが8の倍数になるためには，112，152，192 がＯＫなので，□には１，５，９があてはまります。

(3)　15 を 12 でわると，15÷12＝１ あまり ３ ですから，３あまります。

よって，「15×15×15×15×15×15×15×15」を 12 でわったときのあまりは，「３×３×３×３×３×３×３×３」を12でわったときのあまりと同じです。

３×３＝９ですから，「３×３×３×３×３×３×３×３」は，「９×９×９×９」となります。

９×９＝ 81 を 12 でわると，81÷12＝６ あまり ９ですから，「$\underbrace{9\times9}_{9}\times\underbrace{9\times9}_{9}$」は，

「$\underbrace{9\times9}_{9}$」となるので，答えは９です。