

演習問題集6年上第13回・くわしい解説

目次		
ステップ①	1 p.2
ステップ①	2 p.3
ステップ①	3 p.4
ステップ①	4 p.6
ステップ①	5 p.7
ステップ①	6 p.9
ステップ①	7 p.10
ステップ①	8 p.12
ステップ①	9 p.13
ステップ①	10 p.14
ステップ②	1 p.15
ステップ②	2 p.17
ステップ②	3 p.20
ステップ②	4 p.22
ステップ②	5 p.27
ステップ②	6 p.30
ステップ③	1 p.33
ステップ③	2 p.35
ステップ③	3 p.37

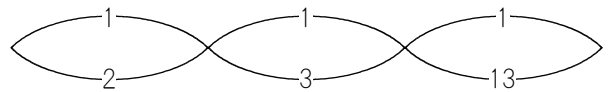
ステップ① 1

(1) $78 \div A$ がわり切れるということは、 A は78の約数です。

78の約数は、1, 2, 3, 6, 13, 26, 39, 78の8個です。

別解 78を素因数分解して約数の個数を求めることもできます。

$78 = 2 \times 3 \times 13$ ですから、右の図のような道の通り方の問題にすることができます。



道の通り方は $2 \times 2 \times 2 = 8$ (通り) ありますから、78の約数も8個あることとなります。

(2) 78をAでわると、あまりが6になるようなAを求める問題です。

78個のボールがあるとします。これを1回あたり何個かずつ取っていくと、最後に6個だけあまったということです。

はじめに78個あって、最後に6個あまったのですから、 $78 - 6 = 72$ (個)を取ったこととなります。

よって、 A は72の約数です。

72の約数は、1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72です。

しかし、これらが全部答えになるというわけではありません。

なぜなら、はじめに78個あって、たとえば2個ずつ取っていったとして、最後に6個あまるわけがないからです。2個ずつ取っていくのですから、6個あまっていたら、まだ2個ずつ取ることができますね。

つまり、72の約数のうち、(最後に6個あまったので) A は6よりも大きい数でなければならないのです。

A にあてはまる数は、8, 9, 12, 18, 24, 36, 72の7個が考えられます。

ステップ① 2

(1) 縦の 216 cm をぴったり切り分けることができるのですから、切り分けた立方体の 1 辺は 216 の約数です。

同じようにして、切り分けた立方体の 1 辺は、264 の約数でもあるし、120 の約数でもあります。

つまり、216 と 264 と 120 の公約数になります。

問題文に「立方体はできるだけ大きくする」と書いてあるので、立方体の 1 辺は、216 と 264 と 120 の最大公約数になり、右の連除法によって、答えは **24** cm です。

2) 216	264	120
2) 108	132	60
2) 54	66	30
3) 27	33	15
	9	11	5
	↓		
	24		

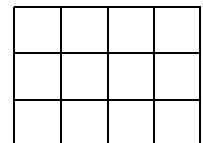
(2) (1) で、切り分けた立方体の 1 辺は 24 cm であることがわかりました。

もとの直方体の縦は 216 cm ですから、縦に $216 \div 24 = 9$ (個) に切り分けました。

もとの直方体の横は 264 cm ですから、横に $264 \div 24 = 11$ (個) に切り分けました。

もとの直方体の高さは 120 cm ですから、高さに $120 \div 24 = 5$ (個) に切り分けました。

たとえば右の図のように、縦に 3 個、横に 4 個の正方形があったとき、全部で何個の正方形がありますか？



この場合、 $3 + 4 = 7$ (個) ではなくて、 $3 \times 4 = 12$ (個) ですね。

同じように考えて、縦に 9 個、横に 11 個、高さに 5 個あった場合も、かけ算をすることになり、 $9 \times 11 \times 5 = 495$ (個) になります。

ステップ① 3 (1)

たとえば、「1以上42以下の7の倍数は何個ありますか。」という問題だったら、 $42 \div 7 = 6$ (個)が正解です。

ところがこの(1)の問題は、「1以上」ではなく「100以上」になっています。

途中から始まっているのですね。

100, 101, 102, …… , 200

このままでは計算しにくいので、

1から99までをつけ加えて、

(1, 2, …, 99,)

100, 101, 102, …… , 200

1から200までにします。

(1, 2, …, 99,) 100, 101, 102, …… , 200

1から200までには、
 $200 \div 7 = 28$ あまり 4 ですから、
 7の倍数は28個あります。

(1, 2, …, 99,)

100, 101, 102, …… , 200

また、つけ加えた1から99までには、
 $99 \div 7 = 14$ あまり 1 ですから、
 7の倍数は14個あります。

(1, 2, …, 99,)

100, 101, 102, …… , 200

よって、100以上200以下の7の
 倍数は、 $28 - 14 = 14$ (個)あります。

(1, 2, …, 99,)

100, 101, 102, …… , 200

ステップ① 3 (2)

(1)で、1から99までには、7の倍数は14個あることがわかりました。

よって、 $7 \times 1, 7 \times 2, \dots, 7 \times 14$ が、1から99までの中にふくまれています。

よって、その次の数である $7 \times 15 = 105$ からが、100から200までの中にふくまれる7の倍数です。

また、1から200までには、7の倍数が28個あることもわかっています。

よって、 $7 \times 1, 7 \times 2, \dots, 7 \times 28$ が、1から200までの中にふくまれています。

したがって、1から200までの中にふくまれている最大の7の倍数は、 $7 \times 28 = 196$ です。

また、(1)で、100から200までの中に7の倍数は14個ふくまれていることがわかっています。

14個
105, , 196

この14個は、7ずつ増える等差数列になっています。

よって、等差数列の和の公式である、「(はじめ+終わり)×個数÷2」を利用すれば、答えを求めることができます。

参考 この等差数列の和の公式は、台形の面積の公式「(上底+下底)×高さ÷2」と同じ形をしていることを知っていれば、忘れにくくなります。

「はじめ」の数は105で、「終わり」の数は196、個数は14個ですから、 $(105+196) \times 14 \div 2 = 2107$ です。

ステップ① 4

- (1) 14でも6でもわり切れるということは、14の倍数でもあるし6の倍数でもあるということです。14と6の公倍数です。

14と6の最小公倍数は42ですから、42の倍数が何個あるかを求めることになります。

$500 \div 42 = 11$ あまり 38 ですから、1から500までの中に42の倍数は11個あります。

- (2) このような問題の場合は「ベン図」を書きます。

右のようなベン図において、

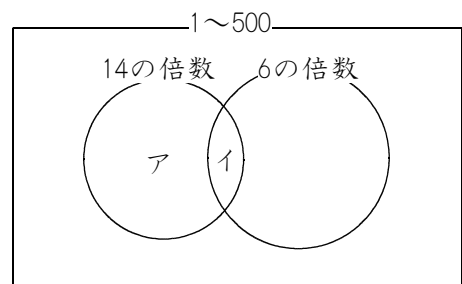
「14でわり切れるが6でわり切れない」のは、アの部分です。

$500 \div 14 = 35$ あまり 10 ですから、1から500までの中には、14の倍数は35個あります。

つまり、ベン図の「ア+イ」の部分が35個です。

「イ」の部分は、14の倍数でも6の倍数でもある数ですから、(1)で求めた通り、11個です。

よって「ア」の部分は、 $35 - 11 = 24$ (個)です。



ステップ① 5 (1)

正方形の縦の長さは、8.4 cmの倍数です。

正方形の横の長さは、15.6 cmの倍数です。

よって正方形の1辺は、8.4 cmの倍数でもあるし、15.6 cmの倍数でもあるわけですから、8.4 cmと15.6 cmの公倍数です。

最も小さい正方形の1辺を求めるのですから、8.4 cmと15.6 cmの最小公倍数を求めることとなります。

このような問題の場合は、8.4も15.6も10倍して84と156にして、それらの最小公倍数を求めてから、10分の1にすれば答えを求めることができます。

84と156の最小公倍数は1092です。

よって最も小さい正方形の1辺は、1092 cmを10分の1にして、**109.2** cmとなります。

$$\begin{array}{r}
 2 \overline{) 84 \quad 156} \\
 2 \overline{) 42 \quad 78} \\
 3 \overline{) 21 \quad 39} \\
 \hline
 7 \quad 13 \rightarrow 1092
 \end{array}$$

参考 10倍にして最小公倍数を求めるというのは、単位をcmからmmにして最小公倍数を求めるということです。最小公倍数を求めたら、mmからcmにもどすために、10分の1にする、ということです。

ステップ① 5 (2)

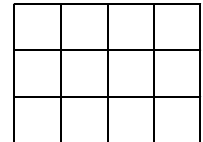
(1)で求めた通り，最も小さい正方形の1辺は109.2cmです。

2番目に小さい正方形の1辺は $109.2 \times 2 = 218.4(\text{cm})$ で，3番目に小さい正方形の1辺は， $109.2 \times 3 = 327.6(\text{cm})$ です。

長方形の縦は8.4cmですから， $327.6 \div 8.4 = 39(\text{枚})$ 必要です。

長方形の横は15.6cmですから， $327.6 \div 15.6 = 21(\text{枚})$ 必要です。

たとえば右の図のように，縦に3枚，横に4枚の正方形があったとき，全部で何枚の正方形がありますか？



この場合， $3 + 4 = 7(\text{枚})$ ではなくて， $3 \times 4 = 12(\text{枚})$ ですね。

同じように考えて，縦に39枚，横に21枚あった場合も，かけ算をすることになり， $39 \times 21 = 819(\text{枚})$ になります。

ステップ① 6

- (1) Aは15秒ごと、Bは25秒ごとに打ち上げられるのですから、AもBも打ち上がるのは、(15と25の最小公倍数である)75秒ごとです。

花火大会が始まる時が、同時に打ち上がる1回目です。

よって、同時に打ち上がる27回目は、1回目の $27-1=26$ (回)あとです。

(27回あとではないことに注意しましょう。)

1回あたり75秒かかるのですから、26回あと、ということは、 $75 \times 26 = 1950$ (秒後)です。

$1950 \div 60 = 32$ あまり 30 ですから、**32分30秒後**になります。

- (2) 最後の花火が打ち上がるのは1950秒後であることが、(1)でわかりました。

Aは15秒ごとに打ち上がるので、 $1950 \div 15 = 130$ (回)打ち上がります。ただし、花火大会が始まる時にも1回打ち上がっているのですから、 $130+1=131$ (回)です。

Bは25秒ごとに打ち上がるので、 $1950 \div 25 = 78$ (回)打ち上がります。ただし、花火大会が始まる時にも1回打ち上がっているのですから、 $78+1=79$ (回)です。

Aは131回、Bは79回打ち上がるのですから、合わせて、 $131+79=210$ (回)聞こえることになりそうですが、「同時に打ち上がる時は、2回ではなく1回聞こえる」のですから、そのぶん回数が少なくなります。

AとBが同時に打ち上がるのは、問題に書いてある通り27回ですから、答えは27回ぶん少なくなって、 $210-27=183$ (回)です。

ステップ① 7

分数に $2\frac{4}{7} = \frac{18}{7}$ と $4.8 = 4\frac{4}{5} = \frac{24}{5}$ をかけたところ、答えが整数になったそうです。

分数を $\frac{\triangle}{\bigcirc}$ とすると、 $\frac{\triangle}{\bigcirc} \times \frac{18}{7} = \text{整数}$ 、 $\frac{\triangle}{\bigcirc} \times \frac{24}{5} = \text{整数}$ となります。

$\frac{\triangle \times 18}{\bigcirc \times 7} = \text{整数}$ 、 $\frac{\triangle \times 24}{\bigcirc \times 5} = \text{整数}$ となりますが、分数×分数が整数になるため

には、たとえば $\frac{27}{8} \times \frac{32}{3} = \frac{\overset{9}{\cancel{27}} \times \overset{4}{\cancel{32}}}{\cancel{8}_1 \times \cancel{3}_1} = \frac{36}{1} = 36$ のように、約分されて、分母が

1 にならなければなりません。

そこで、まず \triangle はどのような数にならなければいけないのか、考えてみます。

$\frac{\triangle \times 18}{\bigcirc \times 7}$ の \triangle は分母の 7 と約分されて、 $\frac{\overset{\text{何か}}{\triangle} \times 18}{\bigcirc \times \cancel{7}_1}$ となるためには、 \triangle は 8 の倍数にならなければなりません。

同じようにして、 $\frac{\triangle \times 24}{\bigcirc \times 5}$ の \triangle は分母の 5 と約分されて、 $\frac{\overset{\text{何か}}{\triangle} \times 24}{\bigcirc \times \cancel{5}_1}$ となるためには、 \triangle は 5 の倍数にならなければなりません。

以上のことから、 \triangle は 7 の倍数でもあるし、5 の倍数でもあるので、 \triangle は 7 と 5 の公倍数になります。

次に、 \bigcirc はどのような数にならなければいけないのか、考えてみます。

$\frac{\triangle \times 18}{\bigcirc \times 7}$ の \bigcirc は分子の 18 と約分されて、 $\frac{\triangle \times \overset{\text{何か}}{\cancel{18}}_1}{\bigcirc \times 7}$ となるためには、 \bigcirc は 18 の約数にならなければなりません。

同じようにして、 $\frac{\triangle \times 24}{\bigcirc \times 5}$ の \bigcirc は分子の 24 と約分されて、 $\frac{\triangle \times \overset{\text{何か}}{\cancel{24}}_1}{\bigcirc \times 5}$ となるためには、 \bigcirc は 24 の約数にならなければなりません。

(次のページへ)

以上のことから、 \bigcirc は18の約数でもあるし、24の約数でもあるので、 \bigcirc は18と24の公約数になります。

分数 $=\frac{\Delta}{\bigcirc}$ の、分子である Δ は7と5の公倍数で、 \bigcirc は18と24の公約数であることがわかりました。

$$A = \frac{7と5の公倍数}{18と24の公約数}$$

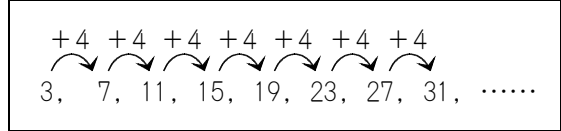
ところで問題には、最も小さい分数を求めなさいと書いてありました。

分数を小さくするためには、分子をなるべく小さく（ $\frac{4}{7}$ より $\frac{1}{7}$ の方が小さい）、分母をなるべく数を大きく（ $\frac{1}{3}$ より $\frac{1}{10}$ の方が小さい）する必要があります。

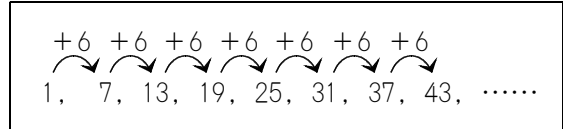
ですから、 $A = \frac{7と5の公倍数}{18と24の公約数}$ ということになり、答えは $\frac{35}{6} = 5\frac{5}{6}$ になります。

ステップ① 8

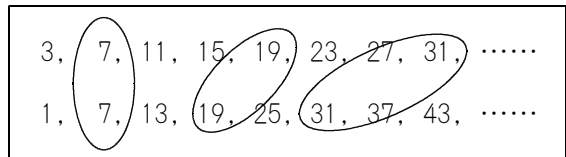
(1) 4でわると3あまる数を書いていくと、右の図のように、最初が3で、4をプラスしていくことになります。



6でわると1あまる数を書いていくと、右の図のように、最初が1で、6をプラスしていくことになります。



両方に共通している数は、7, 19, 31, ... です。



問題には「2けたで、最も小さい整数」と書いてありますから、答えは **19** です。

(2) 「4でわると3あまり、6でわると1あまる」数は、7, 19, 31, ...という等差数列になっていることが、(1)でわかりました。

実は、最も小さい数である「7」さえわかれば、その後の数は、4と6の最小公倍数である12をプラスすることによって求めることができます。

(2)では、7, 19, 31, ...という等差数列の中の、2けたで最も大きい数を求めることになります。

そのまま書いていって、7, 19, 31, 43, 55, 67, 79, **91**と求めることができます。

別解 等差数列のN番目を求める公式である

$$\text{はじめ} + \text{増える数} \times (N - 1)$$

を利用

して求めることもできます。

$$\begin{aligned} \text{はじめの数は7で、増える数は12ですから、} & 7 + 12 \times (N - 1) = 99 \text{ とすると、} \\ 99 - 7 = 92 & \quad 92 \div 12 = 7.6\cdots \quad 7.6\cdots + 1 = 8.6\cdots \end{aligned}$$

よって、8番目の数が2けたの中で最も大きく、 $7 + 12 \times (8 - 1) = 91$ になります。

ステップ① 9

- (1) Aと90の最大公約数は15で、最小公倍数は1170ですから、右の連除法のようになります。

$$\begin{array}{r} 15 \overline{) \begin{array}{cc} A & 90 \\ \hline \text{ア} & \text{イ} \end{array}} \rightarrow 1170 \end{array}$$

イ = $90 \div 15 = 6$ で、 $15 \times \text{ア} \times \text{イ} = 1170$ ですから、
 $15 \times \text{ア} \times 6 = 1170$ となり、 $\text{ア} = 1170 \div 6 \div 15 = 13$ です。

$A \div 15 = \text{ア}$ ですから、 $A = \text{ア} \times 15 = 13 \times 15 = 195$ です。

- (2) 右の連除法のようになります。

$$\begin{array}{r} 15 \overline{) \begin{array}{cc} A & 90 \\ \hline \text{ア} & \text{イ} \end{array}} \end{array}$$

90より小さい
↙

Aは15でわり切れるので、15の倍数です。

Aは90よりも小さいのですから、15, 30, 45, 60, 75が考えられます。

A = 15のときはOKです。

$$\begin{array}{r} 15 \overline{) \begin{array}{cc} 15 & 90 \\ \hline 1 & 6 \end{array}} \end{array}$$

A = 30のときは、まだ2でわれるので、最大公約数が15でなくなるのでダメです。

$$\begin{array}{r} 15 \overline{) \begin{array}{cc} 30 & 90 \\ \hline 2 & 6 \end{array}} \end{array}$$

A = 45のときは、まだ3でわれるので、最大公約数が15でなくなるのでダメです。

$$\begin{array}{r} 15 \overline{) \begin{array}{cc} 45 & 90 \\ \hline 3 & 6 \end{array}} \end{array}$$

A = 60のときは、まだ2でわれるので、最大公約数が15でなくなるのでダメです。

$$\begin{array}{r} 15 \overline{) \begin{array}{cc} 60 & 90 \\ \hline 4 & 6 \end{array}} \end{array}$$

A = 75のときはOKです。

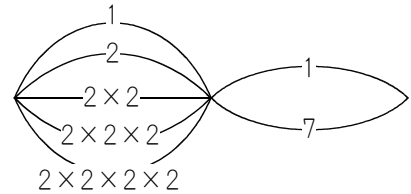
$$\begin{array}{r} 15 \overline{) \begin{array}{cc} 75 & 90 \\ \hline 5 & 6 \end{array}} \end{array}$$

よって、OKなのは15, 75です。

ステップ① 10

(1) 112を素因数分解すると、 $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 7$ です。

よって、右の図のような道の通り方の問題にすることができます。



道の通り方は $5 \times 2 = 10$ (通り) ありますから、112の約数も **10** 個あることとなります。

参考 112の約数を全部書くと、1, 2, 4, 7, 8, 14, 16, 28, 56, 112の10個です。

(2) 約数の個数が2個であるのは、「素数」です。

素数を小さい方から9個書くと、2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23となりますから、9番目の素数は **23** です。

注意 「1」は素数ではありません。

参考 小さい方から9番目までの素数のおぼえ方は、

2 3 5 7 11 13 17 19 23
 兄さんいっつもセブンイレブン、父さんいいな、行く兄さん

(3) 「約数の個数が3個」なのは、「素数の平方数」です。

素数は、2, 3, 5, 7, 11, ……ですから、「素数の平方数」は、 $2 \times 2 = 4$, $3 \times 3 = 9$, $5 \times 5 = 25$, $7 \times 7 = 49$, $11 \times 11 = 121$, ……となります。

よって、1から30までの中にある、約数の個数が3個である整数は、**4, 9, 25** です。

(4) 「約数の個数が奇数」なのは、「平方数」です。

$1 \times 1 = 1$, $2 \times 2 = 4$, $3 \times 3 = 9$, …… , $8 \times 8 = 64$ の **8** 個が、1から70までの中にある平方数です。

参考 たとえば、64の約数を書いてみると、「1と64」、「2と32」、「4と16」、「8」のように、2個ずつのペアの他に、「8」という1個が約数として存在するので、約数が奇数個になるわけです。

ステップ② 1 (1)

Aは2秒間ついて3秒間消えるのですから、「○○×××」の5秒間で1セットです。

Bは3秒間ついて1秒間消えるのですから、「○○○×」の4秒間で1セットです。

AとBの両方を考えるときは、5と4の最小公倍数である、20秒間を1セットにします。

20秒間では、Aは「○○×××○○×××○○×××○○×××」となります。
 20秒間では、Bは「○○○×○○○×○○○×○○○×○○○×」となります。

↑ ↑
↑ ↑
↑
↑

20秒間のうち、AとBの両方ついているのは、上の↑をつけた、6秒間です。

90秒間では、 $90 \div 20 = 4$ あまり 10 ですから、4セットと、あと10秒間のあまりがあります。

1セット20秒間では、両方ついているのは6秒間でしたから、4セットでは、 $6 \times 4 = 24$ (秒間)になります。

あまりの10秒間では、

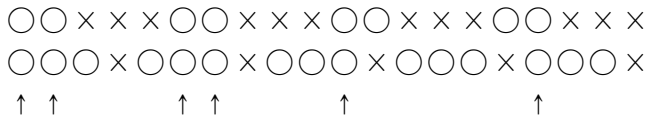
○○×××○○×××
 ○○○×○○○×○○
 ↑ ↑ ↑ ↑

となって、両方ついているのは4秒間です。

4セットでは24秒間、あまりの中では4秒間だけ両方ついているので、合計、 $24 + 4 = 28$ (秒間)になります。

ステップ② 1 (2)

(1)で、1セットは20秒間で、そのときのA、Bのようすは下の図のようになっていることがわかりました。



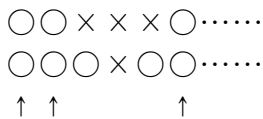
↑をつけたところが、両方ついているときで、1セットの中に6秒間あります。

(2)の問題は、両方ついている時間が75秒間です。

1セットでは両方ついている時間が6秒間ですから、 $75 \div 6 = 12$ あまり 3 により、12セットと、あと残り3秒間だけ、両方ついでればよいことになります。

1セットは20秒間ですから、12セットでは、 $20 \times 12 = 240$ (秒間)です。

あまりの3秒間とは、「両方ついている時間が3秒間」の意味ですから、



ここまでの6秒間の中で、両方ついている時間が3秒間になります。

以上のことから、12セットぶんの240秒間と、あと6秒間あればよいことがわかりましたから、答えは $240 + 6 = 246$ (秒後)です。

ステップ② 2 (1)

たとえば、6というカードは何回ひっくり返されるか考えてみましょう。

6は1の倍数ですから、1回目にひっくり返されます。

6は2の倍数ですから、2回目にひっくり返されます。

6は3の倍数ですから、3回目にひっくり返されます。

6は4の倍数ではありませんから、4回目にはひっくり返されません。

6は5の倍数ではありませんから、5回目にはひっくり返されません。

6は6の倍数ですから、6回目にひっくり返されます。

よって、6がひっくり返されるのは、1回目、2回目、3回目、6回目の4回です。

なぜ4回ひっくり返されたかというと、6の約数は1, 2, 3, 6の4個あるからです。

このことから、「約数の個数ぶん」ひっくり返されることがわかります。

(1)は3回ひっくり返されたカードを求めるわけですから、約数の個数が3個のものを求めることになります。

ステップ① 10 (3)でも考えた通り、約数の個数が3個なのは「素数の平方数」です。

素数は、2, 3, 5, 7, 11, …ですから、素数の平方数は、4, 9, 25, 49, 121, …です。

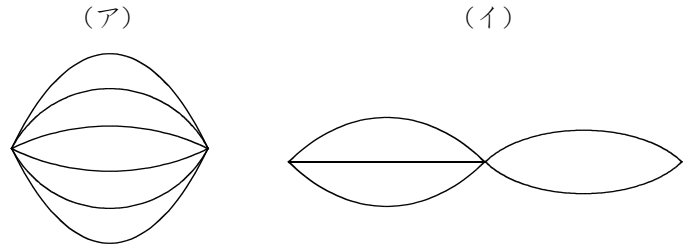
1から60までの中に、素数の平方数は、4, 9, 25, 49の4個あります。

, よってカードの枚数も4枚になります。

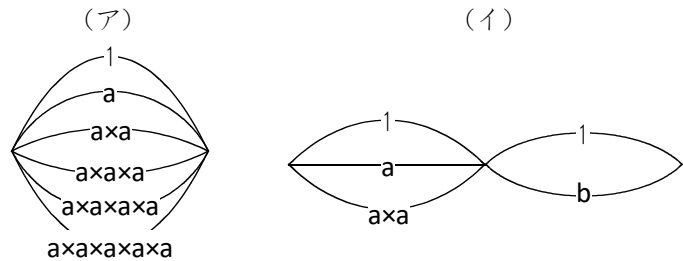
ステップ② 2 (2)

(1)と同じように考えて、約数の個数が6個の整数を求める問題になります。

道の通り方が6通りになるのは、右の(ア)図と(イ)図の2パターンのみです。



よって、約数の個数が6個になるのは、右の(ア)図と(イ)図の2パターンのみです。



(ア)図は、素因数分解すると「 $a \times a \times a \times a \times a$ 」となる場合で、
 (イ)図は、素因数分解すると「 $a \times a \times b$ 」となる場合です。

「 $a \times a \times a \times a \times a$ 」の場合、 $a = 2$ なら、 $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$ です。
 $a = 3$ なら、 $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 243$ で、オーバーしています。

「 $a \times a \times b$ 」の場合、 $a = 2, b = 3$ なら、 $2 \times 2 \times 3 = 12$ です。
 $a = 2, b = 5$ なら、 $2 \times 2 \times 5 = 20$ です。
 $a = 2, b = 7$ なら、 $2 \times 2 \times 7 = 28$ です。
 $a = 2, b = 11$ なら、 $2 \times 2 \times 11 = 44$ です。
 $a = 2, b = 13$ なら、 $2 \times 2 \times 13 = 52$ です。
 $a = 2, b = 17$ なら、 $2 \times 2 \times 17 = 68$ で、オーバーしています。
 $a = 3, b = 2$ なら、 $3 \times 3 \times 2 = 18$ です。
 $a = 3, b = 5$ なら、 $3 \times 3 \times 5 = 45$ です。
 $a = 3, b = 7$ なら、 $3 \times 3 \times 7 = 63$ で、オーバーしています。
 $a = 5, b = 2$ なら、 $5 \times 5 \times 2 = 50$ です。
 $a = 5, b = 3$ なら、 $5 \times 5 \times 3 = 75$ で、オーバーしています。
 $a = 7, b = 2$ なら、 $7 \times 7 \times 2 = 98$ で、オーバーしています。

よって、「 $a \times a \times a \times a \times a$ 」の場合は32のみ、「 $a \times a \times b$ 」の場合は、12, 20, 28, 44, 52, 18, 45, 50で、全部で9個ありますから、答えは9枚です。

ステップ② 2 (3)

カードは、はじめは表になっています。

カードを1回ひっくり返すと、うらになります。

カードを2回ひっくり返すと、表になります。

カードを3回ひっくり返すと、うらになります。

カードを4回ひっくり返すと、表になります。

.....

よって、カードを表にするには、偶数回ひっくり返せばよいことになります。

(1)と同じように考えて、約数の個数が偶数個の整数を求める問題になります。

ステップ① 10 (4)と同じように、「約数の個数が奇数」なのは、「平方数」です。

$1 \times 1 = 1$, $2 \times 2 = 4$, $3 \times 3 = 9$, …… , $7 \times 7 = 49$ の7個が、1から60までの中にある平方数です。

約数の個数が奇数個の整数が7個あるのですから、約数の個数が偶数個の整数は、 $60 - 7 = 53$ (個)あります。

ステップ② 3 (1)

たとえば、49は平方数ですね。 $49 = 7 \times 7$ だからです。

144も平方数ですね。 $144 = 12 \times 12$ だからです。

144を素因数分解すると、 $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$ です。

144を素因数分解した積の中には、「2, 2, 2, 2, 3, 3」があります。

これをペアにすると、「2, 2, 3」と「2, 2, 3」になります。

つまり、 $144 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = (2 \times 2 \times 3) \times (2 \times 2 \times 3)$ となり、 $(2 \times 2 \times 3)$ を計算すると12になりますから、 $144 = 12 \times 12$ となるのです。

同じようにして、平方数である2916を、「 $\square \times \square$ 」の形にしてみましょう。

2916を素因数分解すると、 $2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ です。

これをペアにして、 $2916 = (2 \times 3 \times 3 \times 3) \times (2 \times 3 \times 3 \times 3)$ とすると、 $2 \times 3 \times 3 \times 3 = 54$ ですから、 $2916 = 54 \times 54$ となります。

では、(1)の96について、考えてみます。

$96 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$ ですから、ペアにすることはできません。2は5個ですからあと1個必要ですし、3も1個ですからあと1個必要です。

つまり、96に2と3をかけると、

$$\underbrace{(2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3)}_{96} \times 2 \times 3$$

$$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$$

$$= (2 \times 2 \times 2 \times 3) \times (2 \times 2 \times 2 \times 3) \text{ となり、平方数になるのです。}$$

96に2と3をかける、つまり、 $2 \times 3 = 6$ をかけたなら、平方数になることがわかりました。

ステップ② 3 (2)

(1)と同じように、ペアにすることを考えます。

「 $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9$ 」について、1はなくてもOKで、2、3は素数、 $4 = 2 \times 2$ 、5は素数、 $6 = 2 \times 3$ 、7は素数、 $8 = 2 \times 2 \times 2$ 、 $9 = 3 \times 3$ ですから、

$$\begin{aligned}
 & 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \\
 = & 2 \times 3 \times \underbrace{2 \times 2}_4 \times 5 \times \underbrace{2 \times 3}_6 \times 7 \times \underbrace{2 \times 2 \times 2}_8 \times \underbrace{3 \times 3}_9 \\
 = & \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}_7 \times \underbrace{3 \times 3 \times 3 \times 3}_4 \times \underbrace{5}_1 \times \underbrace{7}_1
 \end{aligned}$$

2は7個ですからペアにするにはあと1個必要です。3は4個ですからペアにできます。5と7は1個ですからペアにするにはどちらもあと1個必要です。

つまり、2と5と7をかけると、

$$\begin{aligned}
 & (\underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}_7 \times \underbrace{3 \times 3 \times 3 \times 3}_4 \times \underbrace{5}_1 \times \underbrace{7}_1) \times 2 \times 5 \times 7 \\
 = & \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}_8 \times \underbrace{3 \times 3 \times 3 \times 3}_4 \times \underbrace{5 \times 5}_2 \times \underbrace{7 \times 7}_2
 \end{aligned}$$

$= (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7) \times (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7)$ となって、平方数になります。

2と5と7をかける、つまり、 $2 \times 5 \times 7 = 70$ をかけたら、平方数になることがわかりました。

ステップ② 4 (1)

このような問題では、次の計算をすれば答えを求めることができます。

$$\begin{aligned} 35 \div 3 &= 11 \text{ あまり } 2 \\ 11 \div 3 &= 3 \text{ あまり } 2 \\ 3 \div 3 &= 1 \\ 11 + 3 + 1 &= 15 \text{ (回)} \end{aligned}$$

では、なぜこのような計算をすると答えを求められるのかを説明していきます。

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 \times 11 \times 12 \times 13 \times 14 \times 15 \times 16 \times 17 \times 18 \times 19 \times 20 \times 21 \times 22 \times 23 \times 24 \times 25 \times 26 \times 27 \times 28 \times 29 \times 30 \times 31 \times 32 \times 33 \times 34 \times 35$$

を、約分をするように3でわり続けると、 $35 \div 3 = 11$ あまり 2 ですから、11回わり切れます。

$$1 \times 2 \times \cancel{3} \times 4 \times \cancel{5} \times 6 \times \cancel{7} \times 8 \times \cancel{9} \times 10 \times 11 \times \cancel{12} \times 13 \times 14 \times \cancel{15} \times 16 \times 17 \times \cancel{18} \times 19 \times 20 \times \cancel{21} \times 22 \times 23 \times \cancel{24} \times 25 \times 26 \times \cancel{27} \times 28 \times 29 \times \cancel{30} \times 31 \times 32 \times \cancel{33} \times 34 \times 35$$

しかし答えは11回ではありません。3でわり続けることによって、新しく1から11までの数ができました。

$11 \div 3 = 3$ あまり 2 ですから、さらに3回わり切れます。

$$1 \times 2 \times \cancel{3} \times 4 \times \cancel{5} \times 6 \times \cancel{7} \times 8 \times \cancel{9} \times 10 \times 11 \times \cancel{12} \times 13 \times 14 \times \cancel{15} \times 16 \times 17 \times \cancel{18} \times 19 \times 20 \times \cancel{21} \times 22 \times 23 \times \cancel{24} \times 25 \times 26 \times \cancel{27} \times 28 \times 29 \times \cancel{30} \times 31 \times 32 \times \cancel{33} \times 34 \times 35$$

まだ終了ではありません。新しく1から3までの数ができましたから、 $3 \div 3 = 1$ により、さらに1回わり切れます。

$$1 \times 2 \times \cancel{3} \times 4 \times \cancel{5} \times 6 \times \cancel{7} \times 8 \times \cancel{9} \times 10 \times 11 \times \cancel{12} \times 13 \times 14 \times \cancel{15} \times 16 \times 17 \times \cancel{18} \times 19 \times 20 \times \cancel{21} \times 22 \times 23 \times \cancel{24} \times 25 \times 26 \times \cancel{27} \times 28 \times 29 \times \cancel{30} \times 31 \times 32 \times \cancel{33} \times 34 \times 35$$

全部で、 $11 + 3 + 1 = 15$ (回)わり切れることがわかりました。

ステップ② 4 (2)

この問題では、(1)と同じように、 $35 \div 9 = 3$ という計算をして、答えは「3回」というミスをする人が続出します。

なぜこの解き方ではできないのかというと、(1)では「3」でわり続けたのですが、その「3」という数は素数でした。

ところが(2)では「9」でわり続けます。この「9」は、素数ではありません。

「9」を素因数分解すると、「 3×3 」ですから、「9でわり続ける」ということを言いかえると、「3と3でわり続ける」、ということなのです。

(1)で、 $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 35$ は、3で15回わり切れることがわかりました。

つまり、 $(1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 35) \div \underbrace{(3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3)}_{15\text{個}}$ は、わり切れる、ということです。

「9である」ということは「 3×3 である」ということですから、「 3×3 」を1セットとすると、 $15 \div 2 = 7$ あまり 1 ですから、7セットと、あと1個あまります。

つまり、 $(1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 35) \div \underbrace{(3 \times 3)}_9 \underbrace{(3 \times 3)}_9 \underbrace{(3 \times 3)}_9 \underbrace{(3 \times 3)}_9 \underbrace{(3 \times 3)}_9 \underbrace{(3 \times 3)}_9 \underbrace{(3 \times 3)}_9$ は、

9で7回わり切れることになります。

ステップ② 4 (3)

まず，次のような超簡単な問題から解説します。

問題

10570000000 は，一の位から連続して「0」が何個ならびますか。

単純に一の位から並んでいる0の数をかぞえればよいので，答えは7個になります。では，次の問題ははどうでしょう。

問題

10570000000 は，10で何回わり切れますか。

10で1回ずつわっていくと，右はしの0が1個ずつなくなっていくので，7回われば1057となり，それ以上わり切れなくなります。よって，答えは7回です。

つまり，「一の位から連続して0が何個ならびますか。」という問題は，「10で何回わり切れますか。」という問題と，同じことになります。さて，「10である」というのは， $10 = 2 \times 5$ ですから，「2でわって，さらに5である。」と同じです。

たとえば，3628800という数が，2で8回わり切れて，5で2回わり切れることがわかっているとします。

次のようなイメージです。

3628800	—	┌	2で	…	○○○○○○○○	(8回)
		└	5で	…	○○	(2回)

それでは，3628800という数は，「2でわって，さらに5である」ということを，何回できるでしょうか。

実は，2回しかできません。

まず1回目，2でわって5でわると，次のようになります。

3628800	—	┌	2で	…	×○○○○○○○	(あと7回)
		└	5で	…	×○	(あと1回)

もう一度，2でわって5でわると，次のようになります。

3628800	—	┌	2で	…	××○○○○○	(あと6回)
		└	5で	…	××	(あと0回)

(次のページへ)

つまり、いくら2でわることが多く残っていたとしても、もう5でわることが不可能なので、「2であって、さらに5でわる」ことは、2回しかできません。

ようするに、「2であって、さらに5でわる」ことは、「2でわり切れる回数」と、「5でわり切れる回数」のうち、少ない回数の方しかできないことになります。

では、 $A = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times 34 \times 35$ について、考えてみましょう。

Aは、2で何回わられるかは、(1)の問題と同様に計算することができます。

$35 \div 2 = 17$ あまり 1 $17 \div 2 = 8$ あまり 1 $8 \div 2 = 4$ $4 \div 2 = 2$ $2 \div 2 = 1$

合計、 $17 + 8 + 4 + 2 + 1 = 32$ (回)、2でわることができません。

次に、Aが、5で何回わられるかを、求めてみましょう。

$35 \div 5 = 7$ $7 \div 5 = 1$ あまり 2

合計、 $7 + 1 = 8$ (回)、5でわることができません。

結局、Aは2で32回、5で8回、わることができました。

「2であって、さらに5でわる」ことは、少ない回数の方しかできないので、8回しかできません。

よって、Aは、一の位から連続して「0」が8個ならんでいることがわかりました。

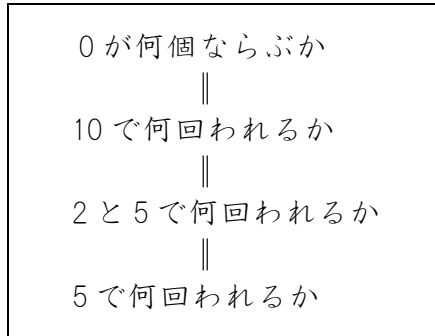
Aは、一の位からかぞえて、9けた目にはじめて0でない数字がならんでいることになります。

ところで、答えを求めるときに、「2で何回わられるか」と、「5で何回わられるか」の、両方を計算して、少ない方である「5で何回わられるか」の回数の方を答えにしました。

しかし、この問題のような、「 $1 \times 2 \times \dots \times N$ 」の0がならぶ個数を求める問題の場合は、いつも必ず「2でわられる回数」よりも「5でわられる回数」の方が少ないので、「2でわられる回数」を求めることはしなくてOKです。

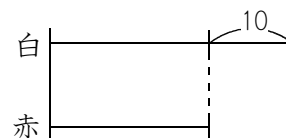
(次のページへ)

この問題の解き方を整理すると、
右の図のようになります。

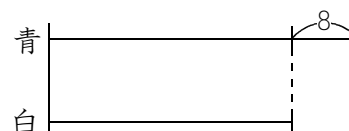


ステップ② 5 (1)

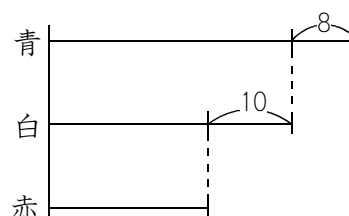
白玉は赤玉よりも10個多く、



青玉は白玉よりも8個多いので、



右の線分図のようになります。



よって、青玉は赤玉よりも、 $10+8=18$ (個)多いことになります。

ステップ② 5 (2)

(1)で、青玉は赤玉よりも18個多いことがわかりました。

赤玉は6の倍数だそうです。

ということは、青玉の個数は、(6の倍数+18)個、ということになります。

ところで、18という数は6の倍数で、6の倍数に6の倍数を加えても6の倍数のままですから(たとえば、600という6の倍数に18を加えると618という6の倍数になります)、青玉も6の倍数です。

問題には、青玉は7の倍数と書いてありました。

よって、青玉は6の倍数でもあるし、7の倍数でもあります。

青玉は、6と7の公倍数ということになります。

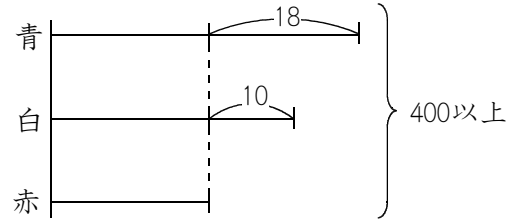
しかも問題には、「最も少ない場合」と書いてありました。

よって青玉は6と7の最小公倍数になり、答えは42です。

点検 青玉が42個の場合、赤玉は $42 - 18 = 24$ (個)で、確かに6の倍数になっています。

ステップ② 5 (3)

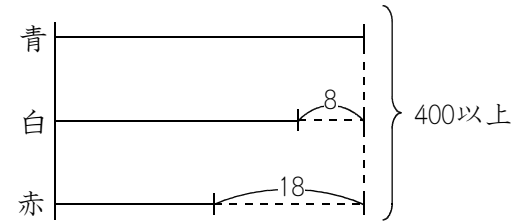
(1)によって、青、白、赤の個数のようすを線分図にすると、右の図のようになることがわかります。



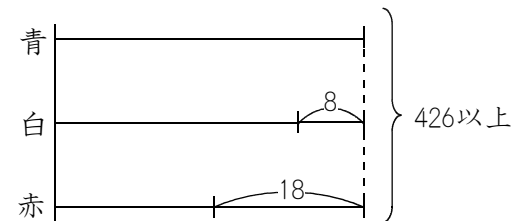
(2)で、青玉の個数は6と7の公倍数になることがわかりました。

6と7の最小公倍数は42ですから、青玉の個数は42の倍数です。

線分図を、青玉をメインの図に変更した方が解きやすくなります。



白玉を8個、赤玉を18個増やすと、合計は $400 + 8 + 18 = 426$ (個)以上となり、右の線分図のようになります。



$426 \div 3 = 142$ ですから、青玉は142個以上です。

しかも青玉は42の倍数です。

$142 \div 42 = 3$ あまり 16 ですから、青玉を42個の3倍にすると142個以上にならないので、青玉を42個の4倍にして、 $42 \times 4 = 168$ (個)にすればOKです。

このとき、白玉は青玉より8個少ないので、 $168 - 8 = 160$ (個)になります。

ステップ② 6 (1)

10の約数は1, 2, 5, 10です。これらの約数のうち, 2番目に小さいのは2です。よって, $【10】 = 2$ です。

21の約数は1, 3, 7, 21です。これらの約数のうち, 2番目に小さいのは3です。よって, $【21】 = 3$ です。

37の約数は1, 37です。これらの約数のうち, 2番目に小さいのは37です。よって, $【37】 = 37$ です。

1の約数は1しかありませんが, それ以外の数は, 必ず約数を2個以上持っています。1と, 自分自身を約数として持っているわけです。

いま, $【A】 = A$ となるようなAを考えるのですが, もし約数が, 1と自分自身のみの2個だったら, 2番目に小さい約数は自分自身ということになりますから, $【A】 = A$ となるわけです。

$【A】 = A$ となるのは, 約数が(1と自分自身だけの)2個だけの数, つまり素数ということなのです。

2以上30以下に, 素数は2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29の10個ありますから, 答えも10個です。

ステップ② 6 (2)

【A】 = 3となるのですから、Aの2番目に小さい約数が3です。

どんな整数も1を約数として持っていますから、Aの最も小さい約数は1です。

よって、Aは2を約数として持たず、3を約数として持つことになります。

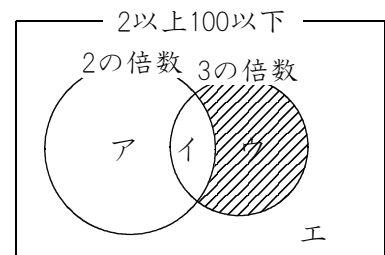
Aは2を約数として持たないのですから、Aは2の倍数ではありません。

Aは3を約数として持つのですから、Aは3の倍数です。

したがって、Aは2の倍数ではなく、3の倍数である整数です。

このような問題は、ベン図を書いて求めます。

右のようなベン図の斜線部分の個数を求めます。



「2以上100以下」になっていて、1から始まってはいませんが、どうせ1はマルの外側のエの部分にあるので、「1以上100以下」にしても、斜線部分の個数に影響はありません。

$100 \div 3 = 33$ あまり 1 ですから、3の倍数は33個あります。ベン図の「イ+ウ」の部分が33個です。

また、イの部分は、2の倍数でも3の倍数でもあるのですから、2と3の最小公倍数である6の倍数です。

$100 \div 6 = 16$ あまり 4 ですから、6の倍数は16個あります。ベン図の「イ」の部分が16個です。

よって、斜線部分であるウの部分は、 $33 - 16 = 17$ (個)になります。

ステップ② 6 (3)

【A】 = 5となるのですから，Aの2番目に小さい約数が5です。

どんな整数も1を約数として持っていますから，Aの最も小さい約数は1です。

よって，Aは2を約数として持たず，3も約数として持たず，5を約数として持つことになります。

注意 Aは2を約数として持っていないのだったら，Aは偶数ではなく奇数なのですから，4を約数として持っているわけがありません。

Aは2を約数として持たないのですから，Aは2の倍数ではありません。

Aは3も約数として持たないのですから，Aは3の倍数ではありません。

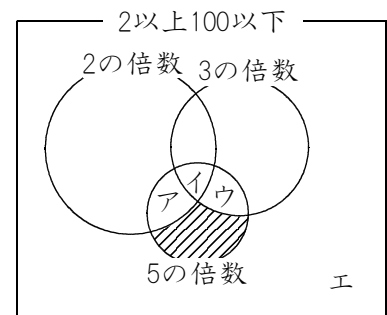
Aは5を約数として持つのですから，Aは5の倍数です。

したがって，Aは2の倍数ではなく，3の倍数でもなく，5の倍数である整数です。

このような問題は，ベン図を書いて求めます。

右のようなベン図の斜線部分の個数を求めます。

「2以上100以下」になっていて，1から始まってはいませんが，どうせ1はマルの外側のエの部分にあるので，「1以上100以下」にしても，斜線部分の個数に影響はありません。



イの部分は，2の倍数でも3の倍数でも5の倍数でもあるのですから，2と3と5の最小公倍数である30の倍数です。 $100 \div 30 = 3$ あまり 10 ですから，イは3個です。

「ア+イ」の部分は，2の倍数でも5の倍数でもあるのですから，2と5の最小公倍数である10の倍数です。 $100 \div 10 = 10$ ですから，「ア+イ」は10個です。

イは3個ですから，アは $10 - 3 = 7$ (個)です。

「イ+ウ」の部分は，3の倍数でも5の倍数でもあるのですから，3と5の最小公倍数である15の倍数です。 $100 \div 15 = 6$ あまり 10 ですから，「イ+ウ」は6個です。

イは3個ですから，ウは $6 - 3 = 3$ (個)です。

5の倍数は $100 \div 5 = 20$ (個)です。

斜線部分は， $20 - (\text{ア} + \text{イ} + \text{ウ}) = 20 - (7 + 3 + 3) = 20 - 13 = 7$ (個)です。

ステップ③ 1 (1)

式で書くと、「 $A \div 12 = B$ あまり B 」ということです。

$A \div 12 = 1$ あまり 1,

$A \div 12 = 2$ あまり 2,

$A \div 12 = 3$ あまり 3,

.....

と、永遠に続くから、 A は無限に大きくなると思うかも知れませんが、たとえば、

「 $A \div 12 = 13$ あまり 13」って、何かおかしくないですか？

わり算の答えが13になるのは別に構いませんが、あまりが13っておかしいですね。

12でわっているのですから、13もあまってははいけません。

つまり、12でわったときのあまりは、最大で11までなのです。

ですから、「 $A \div 12 = B$ あまり B 」の B は、最大で11になるので、

$A \div 12 = 11$ あまり 11

A の中に12が11回入っていて、11あまっているので、 $A = 12 \times 11 + 11 = 143$ です。

ステップ③ 1 (2)

式で書くと、「 $99 \div C = D$ あまり D 」ということです。

つまり、99の中にCがD回入っていて、Dだけあまっているということですから、 $C \times D + D = 99$ ということです。

ここからあとの解き方をしっかりマスターしましょう。

式の中の、あとの方の「 D 」を、「 $1 \times D$ 」と書いても同じことですね。

すると、「 $C \times D + D = 99$ 」は、「 $C \times D + 1 \times D = 99$ 」となります。

「 $\times D$ 」の部分が共通ですからまとめると、「 $(C + 1) \times D = 99$ 」となります。

ところで、はじめの式「 $99 \div C = D$ あまり D 」において、 C でわっているのですから、あまりの D は、 C よりも小さい数でなければいけません。そのことも考えると、「 $(C + 1) \times D = 99$ 」の式にあてはまる C と D は、

$$C + 1 = 99, D = 1 \rightarrow C = 98, D = 1$$

$$C + 1 = 33, D = 3 \rightarrow C = 32, D = 3$$

$$C + 1 = 11, D = 9 \rightarrow C = 10, D = 9$$

よって、 C として考えられるのは、**98, 32, 10**です。

ステップ③ 2

たとえば、 $A + I + U = 12$ で、 $A < I < U$ だとしましょう。そのときの、 U として考えられる数は何でしょう。

たとえば、 I 、 U のうち、最も大きい数は U です。

もし「 $A = I = U$ 」なら、 $U = 12 \div 3 = 4$ です。よって、 U は4よりは大きいです。

また、 $A + I + U = 12$ ですから、 U だけで12ではいけませんね。よって、 U は12よりは小さいです。

したがって、 U は4よりは大きく、12よりは小さいことがわかります。

同じようにして、 $\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} = \frac{11}{12}$ で、 $A < B < C$ のときを考えてみます。

$A < B < C$ なら、 $\frac{1}{A} > \frac{1}{B} > \frac{1}{C}$ です。

よって、 $\frac{1}{A}$ 、 $\frac{1}{B}$ 、 $\frac{1}{C}$ のうち、最も大きい分数は $\frac{1}{A}$ です。

もし、 $\frac{1}{A} = \frac{1}{B} = \frac{1}{C}$ なら、 $\frac{1}{A} = \frac{11}{12} \div 3 = \frac{11}{36}$ です。

$\frac{1}{A}$ は分子が1になっているので、 $\frac{11}{36}$ も分子を(11でわって)1にすると、分母は、 $36 \div 11 = 3.2\dots$ という数になります。……(★)

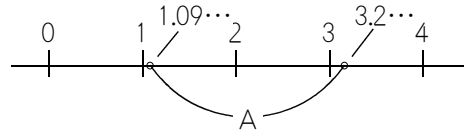
また、 $\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} = \frac{11}{12}$ ですから、 $\frac{1}{A}$ だけで $\frac{11}{12}$ ではいけませんね。

よって、 $\frac{1}{A}$ は $\frac{11}{12}$ よりは小さいです。

$\frac{1}{A}$ は分子が1になっているので、 $\frac{11}{12}$ も分子を(11でわって)1にすると、分母は、 $12 \div 11 = 1.09\dots$ という数になります。……(☆)

(次のページへ)

(★), (☆)から, Aは3.2…と1.09…の間の数になり, Aとして考えられる数は2と3です。



【A = 2の場合】

A = 2ですから, $\frac{1}{A} = \frac{1}{2}$ です。

すると, $\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} = \frac{11}{12}$ は, $\frac{1}{2} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} = \frac{11}{12}$ となります。

よって, $\frac{1}{B} + \frac{1}{C} = \frac{11}{12} - \frac{1}{2} = \frac{5}{12}$ となります。

$\frac{1}{B}$ は, $\frac{5}{12} \div 2 = \frac{5}{24} = \frac{1}{4.8}$ と, $\frac{5}{12} = \frac{1}{2.4}$ の間の数ですから, Bは, 4.8と2.4の間の数になり, Bとして考えられる数は3と4です。

B = 3のとき, $\frac{1}{B} + \frac{1}{C} = \frac{5}{12}$ は, $\frac{1}{3} + \frac{1}{C} = \frac{5}{12}$ となり, $\frac{1}{C} = \frac{5}{12} - \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$ です。

よって, C = 12です。

B = 4のとき, $\frac{1}{B} + \frac{1}{C} = \frac{5}{12}$ は, $\frac{1}{4} + \frac{1}{C} = \frac{5}{12}$ となり, $\frac{1}{C} = \frac{5}{12} - \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$ です。

よって, C = 6です。

したがって, (A, B, C) = (2, 3, 12), (2, 4, 6)です。…★

【A = 3の場合】

A = 3ですから, $\frac{1}{A} = \frac{1}{3}$ です。

すると, $\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} = \frac{11}{12}$ は, $\frac{1}{3} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} = \frac{11}{12}$ となります。

よって, $\frac{1}{B} + \frac{1}{C} = \frac{11}{12} - \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$ となります。

$\frac{1}{B}$ は, $\frac{7}{12} \div 2 = \frac{7}{24} = \frac{1}{3.4\cdots}$ と, $\frac{7}{12} = \frac{1}{1.7\cdots}$ の間の数ですから, Bは, 3.4…と1.7…の間の数になり, Bとして考えられる数は2と3ですが, A = 3ですから, どちらも, A < B < Cの条件に合いません。

よって, 条件に合うのは ★の(2, 3, 12), (2, 4, 6)のみであることがわかりました。

ステップ③ 3 (1)

1から9までの数をそれぞれ素因数分解してみると、

1 = 1 は素数ではないので素因数分解できない

2 = 2

3 = 3

4 = 2 × 2

5 = 5

6 = 2 × 3

7 = 7

8 = 2 × 2 × 2

9 = 3 × 3

素因数分解すると、2, 3, 5, 7しか出てこないことに気がつきます。

しかも、5と7は1回ずつしか出てきません。

ということは、 $\frac{A \times B \times C}{D \times E \times F \times G}$ の式の中に5や7がふくまれていたら、他の数とは約分することができないことになります。

よって、 $\frac{A \times B \times C}{D \times E \times F \times G}$ の式の中に5や7がふくまれていたら、答えにも5や7がふくまれることになりますが、答えは $\frac{1}{8}$ なので、5や7がふくまれていません。

したがって、AからGの7個には、5と7以外の、1, 2, 3, 4, 6, 8, 9の7個があてはまることになり、どれにもあてはまらない整数は**5**と**7**です。

ステップ③ 3 (2)

(1)で、AからGには、1, 2, 3, 4, 6, 8, 9があてはまることがわかりました。

——— まず、3という素因数について考えます。 —————

$\frac{A \times B \times C}{D \times E \times F \times G}$ の答えである $\frac{1}{8}$ を素因数分解すると、 $\frac{1}{2 \times 2 \times 2}$ です。

この答えには、3をふくんでいないことに注意しましょう。

ところで、1, 2, 3, 4, 6, 8, 9の中には、3をふくむ数として、3, 6, 9があります。

答えの中に3がない理由は、約分されて3がなくなったからです。

ところで、3はもちろん3を1個ふくみ、 $6 = 2 \times 3$ ですから6は3を1個ふくみ、 $9 = 3 \times 3$ ですから9は3を2個ふくみます。合計4個の3をふくみます。

よって、 $\frac{A \times B \times C}{D \times E \times F \times G}$ において、

【分子に3と6があって分母に9がある】場合か、

【分子に9があって分母に3と6がある】場合に、約分されて3がなくなります。…★

——— 次に、2という素因数について考えます。 —————

$\frac{A \times B \times C}{D \times E \times F \times G}$ の答えである $\frac{1}{8}$ を素因数分解すると、 $\frac{1}{2 \times 2 \times 2}$ です。

また、1, 2, 3, 4, 6, 8, 9の中には、2をふくむ数として、2, 4, 6, 8があります。

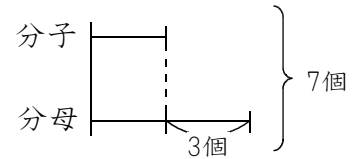
2はもちろん2を1個ふくみ、
 $4 = 2 \times 2$ ですから4は2を2個ふくみ、
 $6 = 2 \times 3$ ですから6は2を1個ふくみ、
 $8 = 2 \times 2 \times 2$ ですから8は2を3個ふくみます。

2を何個ふくむか
2…1個
4…2個
6…1個
8…3個

合わせて、2は $1 + 2 + 1 + 3 = 7$ (個)あり、答えが $\frac{1}{2 \times 2 \times 2}$ ですから、分子よりも分母の方が2を3個多くふくむ状態にします。

(次のページへ)

右の線分図のようになり，分子は $(7-3) \div 2 = 2$ (個)，分母は $2+3=5$ (個) ふくむ状態にします。



2を何個ふくむかは右の表のようになっていましたから，

【分子に2と6があって分母に4と8がある】場合か，
【分子に4があって分母に2と6と8がある】場合に，

2を何個ふくむか
2…1個
4…2個
6…1個
8…3個

答えが $\frac{1}{2 \times 2 \times 2}$ になります。…☆

————— 整理して，答えを求めます。 —————

★と☆でわかったことをもう一度書くと，次のようになります。

★	【分子に3と6があって分母に9がある】場合か，	(ア)
	【分子に9があって分母に3と6がある】場合。	(イ)

☆	【分子に2と6があって分母に4と8がある】場合か，	(ウ)
	【分子に4があって分母に2と6と8がある】場合。	(エ)

6が分子にあるなら，(ア)と(ウ)を利用して， $\frac{2 \times 3 \times 6}{4 \times 8 \times 9}$ となり， $\frac{A \times B \times C}{D \times E \times F \times G}$ の形にするために， $\frac{2 \times 3 \times 6}{1 \times 4 \times 8 \times 9}$ とします。

6が分母にあるなら，(イ)と(エ)を利用して， $\frac{4 \times 9}{2 \times 3 \times 6 \times 8}$ となり， $\frac{A \times B \times C}{D \times E \times F \times G}$ の形にするために， $\frac{1 \times 4 \times 9}{2 \times 3 \times 6 \times 8}$ とします。

したがって，(A, B, C, D, E, F)は2組あって，
(2, 3, 6, 1, 4, 8, 9)，**(1, 4, 9, 2, 3, 6, 8)** です。